2009 年 7 月　总第 1 期

博杰网（2009）03 号
数之理论坛月刊

數之理

Nature of Science

融合经典数学推理与现代信息技术

努力为祖国的科技发展撑起一片蓝天

博杰学习网

http://boj.5d6d.com/ 2009

No. 7

SHU ZHI LI Monthly

目 次

·格言· 人生最大的遗憾在于到达终点却回头发现一无所有;
民族最大的悲剧在于满腹忠言却精神胜利无所诉求。

《数之理》发刊词

科学无止境. 在这个充满着发明和创造的时代, 科学改变命运, 已成为不争的事实. 科教兴国, 人才强国, 中华民族要雄起, 就迫切地需要一大批甘于和勇于为科学事业不计利益、无怨无悔地奉献终生的人.

科学的探索充满着艰辛, 也不乏乐趣. 学科竞赛, 则是这条漫长道路的前段. 作为选拔优秀人才、培养科学素质的重要载体, 学科竞赛, 承担着中国少数学有所长的精英在高中阶段的拔尖培养和选拔任务. 无论外界的声音如何, 我们将坚定不移的继续把这条路走下去.

正如裘宗沪老先生在《数学奥林匹克之路——我愿意做的事》中所写的, 学科竞赛作为中学生群体性的课外活动, 将是“不废江河万古流”. 我们学习学科竞赛, 要端正态度, 考虑更多功利之外的东西, 不要重演“博士=烈士”的悲剧.

本刊定名为《数之理》, 正是出于这方面的考虑. 尽管本刊是高中数学竞赛、信息学竞赛方面的专业刊物, 我们的刊物名称中仍然没有出现“竞赛”“高中”这样的字眼. 也许本刊的英文名字“Nature of Science”更浅显一些: Nature 和 Science 是世界最权威的两大科学期刊, 科学的本质, 这里的用意就是, 探索自然界的奥秘. 希望读者更加看重“数”中的“真理”.

有的读者可能会认为, 笔者是一个专门从事学科竞赛研究工作的人, 否则无法抽出如此多的精力办“一个人的月刊”. 而事实是, 我是一名普通的学习数学、信息学竞赛的高中学生. 我之所以如此愿意为学科竞赛事业做事, 正是由于我对科学事业的挚爱.

我是出于感恩的心进行学科竞赛研究, 希望在不多的几年中, 为走过的学科竞赛之路留下更多有意义的东西. 从骗分导论到数之理论坛, 再到今天的本刊, 都是我为实现智慧共享、共同进步做出的一点微薄努力.

现在收费的东西太多了, 甚至开始封锁资料, 这不是一个好现象, 甚至可以说是社会风气的衰落. 我深知, 个人的力量是有限的, 因此诚挚欢迎读者加入我们的行列.

学习学科竞赛, 不能满足于会做题, 而要在理论方面有所研究、有所创新. 我们在科技领域落后的重要原因之一, 就是缺乏创新精神, 固守成规. 尤其是基础科学领域, 更是无人问津. 这一局面必须被打破.

本刊是国内唯一的综合数学竞赛、信息学竞赛的高中刊物, 也是第一个完全由学生创办的数学竞赛刊物. 希望我们的首创工作能够打破学科界限, 促进竞赛全面发展.

本刊的宗旨是“融合经典数学推理与现代信息技术, 努力为祖国的科技发展撑起一片蓝天”. 希望读者阅读后, 不仅能够增长学科竞赛方面的知识, 还能够在人生的目标和境界上更进一步, 让“奉献社会”不再成为一句口号.

本刊的栏目设置, 在本期中已有所体现. 现在明确各栏目的意义, 以便读者投稿.

专题讲座 数学、信息学竞赛的专题讲解、应试策略等原创文章.

竞赛之窗 数学、信息学竞赛（包括模拟赛）试题、解答.

沙场点兵 数学、信息学竞赛的模拟试题. 主要针对联赛级别.

问题新解 数学、信息学已有问题的另解、深化、推广, 或者纠正原答案的谬误.

命题解题 原创的数学、信息学竞赛试题. 可以是已解决问题, 并附上解答; 也可以是开放问题, 供大家讨论.

科技之光 最新、最有价值的世界科技进展; 生活中的科学知识.

牛人足迹 介绍自己或其他同学的成功事迹和经验.

博杰学习网 boj.pp.ru 和数之理论坛 boj.5d6d.com 是本刊的官方发布网站, 免费下载, 谨防假冒. 数之理论坛已经开通相关讨论板块, 是本电子出版物的唯一官方讨论区, 欢迎讨论问题.

欢迎各位读者提出宝贵的意见建议.

刊名	数之理	**主管**	博杰学习网
性质	数之理论坛官方学术月刊	**主办**	数之理论坛
内容	高中数学与信息学竞赛	**主编**	李博杰
刊次	2009 年第 1 期（总第 1 期）	**发行**	http://boj.5d6d.com/
版次	2009 年 7 月 9 日	**邮件**	libojiesjzez@163.com
字数	86 千字，78 页	**地址**	石家庄二中 2007 级 19 班

·竞赛之窗· 第49届IMO预选题

内部资料,根据相关规定,第50届IMO之前,不得公开.省略了第48届IMO试题.

几何部分

G2. 已知平行四边形ABCD,AB∥CD.存在点E在直线BC上线段BC外的部分,F在线段AD上,使得∠DAE=∠CBF.设CD,EF交于点I,点J是AB与EF的交点.设K是线段EF的中点,已知它不在直线AB上.证明:I在△ABK的外接圆上,当且仅当K在△CDJ的外接圆上.

G3. 令ABCD是一个凸四边形.P,Q是ABCD内的点,使得PQDA,QPBC是圆内接四边形.已知存在点E在线段PQ上,使得∠PAE=∠QDE,∠PBE=∠QCE.证明ABCD是圆内接四边形.

G4. 在锐角三角形ABC中,BE、CF为高.两个过点A、F的圆分别切直线BC于点P、Q,使得B在线段CQ上.证明直线PE、QF交于△AEF的外接圆上.

G6. 给定凸四边形ABCD,证明存在点P在四边形内,使得∠PAB+∠PDC=∠PBC+∠PAD=∠PCD+∠PBA=∠PDA+∠PCB=90°,当且仅当对角线AC,BD垂直.

代数部分

A2. 是否存在函数 $f,g:N^+\to N^+$,使得

i) f(x)和g(x)都是递增函数.

ii) $g(f(x))>f(g(g(x)))$.

A5. 找出所有的正实数 a,b,c,d 使得

$$\begin{cases} abcd=1 \\ a+b+c+d\ge \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a} \\ a+b+c+d\ge \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{d}{c}+\dfrac{a}{d} \end{cases}$$

A6. 已知 a,b,c,d 是正实数,求证:

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c}+\frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d}+\frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a}+\frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b}\ge 0.$$

数论部分

N1. 令 n 是一个正整数, p 是一个素数.证明:若 $a^n+pb=b^n+pc=c^n+pa$,则 $a=b=c$.

N2. 找到所有函数 $f:N^+\to N^+$,使得

i) $d(f(x))=x$

ii) $f(xy)\mid(x-1)y^{xy-1}f(x),\forall x,y\in N^+$.

N3. 对于任意整数m,定义 $t(m):Z\to\{1,2,3\}$,满足 $3\mid t(m)+m$.函数 $f:Z\to Z$ 使得 $f(0)=1,f(-1)=0,f(1)=-1$,且

$f(2^n+m)=f(2^n-t(m))-f(m)$

$\forall m,n\in N,2^n>m$.证明:

$f(3p)\ge 0(\forall p\in N)$

N4. 令 $a_0,a_1,\ldots,a_2,\ldots$ 为一个正整数序列,使得 $\gcd(a_i,a_{i+1})>a_{i-1}$.证明:

$a_n\ge 2^n(\forall n\ge 0)$.

N5. 令 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是正整数,满足 $a_i\ne a_j$ $(1\le i<j\le n)$,证明存在 $1\le i<j\le n$ 使得 $3a_k\nmid a_i+a_j(\forall k=1,2,\ldots,n)$

N6. 找出所有的正整数 n,使得存在正整数 k,l 满足 $C_{2^n-1}^{k}\equiv C_{2^n-1}^{l}(\bmod 2)$.

$k\ne l,k,l\in\{0,1,\ldots,2^{n-1}-1\}$.

组合部分(不全)

C1. 令 n 是一个正整数,找到所有数对 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 在集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中,具有下列性质: $k\mid 2(a_1+a_2+\ldots+a_k)$ $\forall k=1,2,\ldots,n$.

·专题讲座· 单位分数的和

（本讲数学信息学结合）

《中等数学》2009 年第 6 期上有这样一道题：已知无穷数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\ldots$，其中的 k 项之和为 1，求 k 的最小值.

设从数列中取出 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_k}=1$，令 $y_i=\frac{x_1x_2\ldots x_k}{x_i}$，则 $y_1+y_2+\ldots+y_k=x_1x_2\ldots x_k$.

因为 $x_n\equiv 2(\bmod 3)$，对上式两边取 mod 3 得 $k\cdot 2^{k-1}\equiv 2^k(\bmod 3)$，即 $k\equiv 2(\bmod 3)$.

又因为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}<1$，故 $k>5$，进而猜测 $k=8$，构造 2, 5, 8, 11, 20, 41, 110, 1640 即得.

推广 1

我们进一步考虑，如果将公差为 3 的数列的条件去掉，考虑任意一个有理数 $\frac{p}{q}$ 表示为若干个分子为 1 的不同分数（以下称“单位分数”）之和，使得单位分数尽量少.

首先我们证明，对于任意一个有理数 $\frac{p}{q}$，$p,q\in Z,(p,q)=1$，一定可以表示成若干个单位分数之和. 若 $q=1$，则这是一个整数，表示为 q 个 1 之和即可. 若 $p>q$，则首先取出 $[p/q]$ 个 1，变为一个真分数.

下面考虑 $q>1, p<q$. 若 $p=1$，已经是一个单位分数，命题成立. 若 $p>1$，则必存在正整数 a，使得 $\frac{1}{a+1}<\frac{p}{q}<\frac{1}{a}$. 此时 $pa<q$. 取单位分数 $\frac{1}{a+1}$，剩余部分为 $\frac{p}{q}-\frac{1}{a+1}=\frac{pa+p-q}{qa+q}$，分子 $pa+p-q<p$. 由于分子为整数，故 $pa+p-q\le p-1$，即每取这样的一个单位分数，分子至少减小 1，根据无穷递降原理，总有一个时刻满足分子为 1，命题成立.

然而，上述方法得到的单位分数数列并不一定是最少的，例如 $\frac{61}{84}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$，而上面的做法是 $\frac{61}{84}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{39}+\frac{1}{1820}$. 那么，对于一般情况，如何做到最少？

首先考虑这样一种方法，枚举每个可能的最大分数，再依次减小，向下递归枚举. 对于上例，第一个分数先枚举 1/2，然后是 1/3, 1/4，以此类推. 我们注意到这样一个严重的问题：到底每个分数要小到多少才能停止呢？否则，这个枚举无穷无尽，就无法出解. 由于前面已经通过构造法，得到了一种单位分数数列，而且经过测试，这种数列的项数比最优解多不很多，因此可以以它作为标杆，凡是比这个构造解差的，一概舍弃.

具体来说，就是枚举到第 i 个分数 $1/a_i$，构造解后面还有 n 个单位分数，原数剩余部分为 t，当我们枚举 $1/(a_i+1), 1/(a_i+2)$，时，一旦出现 $n/(a_i+t)<t$，立即停止，因为此时即使后面全用 $1/(a_i+t)$，也不比构造解好，因此可以舍弃.

通过以上方法，我们使枚举搜索有了限度，但搜索的效率仍不尽如人意. 对于深度较大的情况，我们可以对搜索树的深度进行控制，总体上按照上述深度优先搜索来运行，如果深度达到了当前最大深度 d_m，就停止搜索这棵子树. 如果深度 d_m 无解，则限制深度为 d_m+1，以此类推，直到找到一个可行解. 这就是“迭代加深搜索”.

显然，这样的搜索方式能够保证解的最优性，因为搜索深度 d 之前，必然搜索过了 1, 2, …, d−1 的所有深度，这对于要求解的深度最小的问题而言是正确的.

有人会问，这样的方法会导致大量的重复搜索，因为搜索 d+1 时还要将 d 的搜索树重走一遍. 实则不然，因为 d+1 层的结点要远远多于 d 层的结点，每一个中间结点都会在下一层产生很多分支，例如本题中每个 $1/a_i$ 会产生大量的 $1/(a_i+1), 1/(a_i+2), \ldots$ $1/(a_i+t)$. 因此，对于 d=1, 2, …，搜索树的规模基本上成一个等比数列增长，前面 d 层的搜索量对于 d+1 来说微不足道，完全不用考虑重复带来的损失.

上述算法利用了搜索树不同层数节点数悬殊的特点，从根本上避免了“误入藕花

深处”，最大限度减少了无用搜索.

然而，对于本题而言，仅仅使用剪枝和迭代加深搜索是不够的. 如果是人，会首先选择“看起来正确”的方向试验；那么，作为计算机，又应该如何确定正确的搜索顺序，使得正确解尽快浮出水面呢？

我们在开始的证明有限性时，注意到分子越小，后面的分子就越可能尽快取到1. 而减去后分子的大小顺序，恰好与单位分数的分母大小顺序相同. 因此我们应该尽可能搜索距离最优解看起来较近的位置，以便在这一层搜索树中尽快得到解. 此例对于顺序的选择要求并不明显，因为最佳搜索顺序恰好是分母从小到大的顺序. 而对于其他问题，我们可以设计一个启发函数，估算当前节点到目标节点的距离，将同一点处的启发函数值排序，控制搜索顺序. 在“八数码问题”中启发搜索有着重要应用. 在CTSC2009中，“十五数码问题”更是将搜索中的顺序选择与剪枝优化发挥到了极致.

推广2

考虑连续的单位分数之和 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$，这个级数是发散的. 令

$$g(x)=\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\ldots+\frac{(-1)^{k+1}}{kx^k}+\cdots$$

则 $\frac{1}{x}=\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+\ldots$

令 $x=1,2,\ldots,n$，累加上式，得到

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2})-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n^3})+\ldots$$

后面的级数求和是一个有限值，称为欧拉常数 c=0.577218…

故 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+c$，当n足够大时，调和级数的和趋近于 $\ln n$.

推广3

有一个大家耳熟能详的故事，老人将家中的11匹马，分给大儿子1/2，二儿子1/4，三儿子1/6，最后邻居牵来一匹马，解决了分马难题. 事实上，三个单位分数1/2, 1/4, 1/6之和根本不是1，而并不是任何三个单位分数都能使用“牵来一匹马”的方法解决.

牵来一匹马，本质就是分子加1，亦即当且仅当 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{n-1}{n}$ 时，能够分马.

下面是仅有的7种可能的分法.

7/8=1/2+1/4+1/8；
11/12=1/2+1/4+1/6=1/2+1/3+1/12；
17/18=1/2+1/3+1/9；19/20=1/2+1/4+1/5；
23/24=1/2+1/3+1/8；41/42=1/2+1/3+1/7.

1950年，Erods猜想，对于正整数 $n>1$，总有 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，后来被加强为 $x<y<z$. 单位分数的和，与现代数论中的丢番图理论相关，值得深入研究.

·命题解题·

奇阶幻方填法的新进展

幻方是一种有趣的数学游戏：在 $n\times n$ 的方格中，填入 $1,2,\ldots,n^2$ 这些数，使得每行，每列的n个数之和均相等. 这里n称为幻方的阶.

很早以前，就有经典的填法. 对于奇阶幻方，我们首先在第一行中央填入1，然后按如下规则依次填数 $2,3,\ldots,n^2$.

若右上角没有数，则填入此处. 若右侧为边界，则填入上面一行的最左侧. 若上面为边界，则填入右面一列的最下边. 若现在位于右上角，填入下面一个方格. 若待填方格已经有数，则填入待填格下面的方格.

在解决具体问题时，多数人也只能按照上述规则逐一填数. 但是，存在一个弊端，每次待选择的数有很多，容易遗漏条件；另外，在表达问题时，语言不简练，不严密，不易证明. 我们在解决方格填数类的组合问题时，一般希望给出每个方格所填数的表达式.

初看起来，幻方中的数没有显然的规律. 但是，我们可以受到一道数学竞赛试题的启发，那道题构造的结果是 $a_{ij}\equiv a_i+2a_j(\bmod n)$. 我们不禁想，能否利用取模操作来找规律呢？

观察填数规则，如此众多的到达边界的处理，共同的地方就是“绕过边界”，假设将幻方相邻复制若干次，就可以越过边界填入另一个幻方. 而现实中，则是填入了另一侧. 更形象的说，幻方被卷曲成了一个圆筒（左右，上下两个方向分别上下连接，这样的几何体在三维空间中不存在，所以每次只考虑一个方向的连接，想象成圆柱），边界只是人

为划分的. 因此, 开始时填入 1 的位置是可以任意规定的, 各行各列的地位完全平等.

以上这些对称与和谐, 坚定了我们使用类似的取模操作发现填数通式的信心.

设 $A(a,b)$ 表示 a 行 b 列所填数. 首先, 我们猜想可能的表达式. 由于模为 n, 而最终需要取遍 $1,2,...,n^2$, 故必有×n 的项, 决定位于 1-n, n-2n…的组别; 而每一组中 mod n 的余数, 需要有常数项. 即 $A(i,j)=n(f \bmod n)+g \bmod n+C$, 其中 $f,g:(i,j)\to Z$.

令 $t=\dfrac{5n-1}{2}$, 则

$$A(i,j)=n((t-i+j)\bmod n)+((t-i-j-1)\bmod n)+1.$$

显然, $A(a,b)$ 最大值为 n^2, 最小值为 1, 符合幻方的规定; 其次证明没有两个数相等. 假设存在 $A(i,j)=A(k,l)$, 则由于 f 是除 n 的商, g 是余数, 两部分必须分别相等, 即有 $\begin{cases}t-i+j=t-k+l\\t-i-j-1=t-k-l-1\end{cases}$, 则 $\begin{cases}i-j=k-l\\i+j=k+l\end{cases}$, 加减得 $2i=2k,2j=2l$, 而 $i,j,k,l=1,2,...,n$, 显然有 $i=k,j=l.$

最后证明, 由上式求出的方阵为幻方, 满足每行每列和相等. 首先验证行和固定.

$$\sum_{j=1}^{n}A(a,j)=\sum(n((t-a+j)\bmod n)+(t-a-j-1)\bmod n+1)$$
$$=n\sum(t-a+j)\bmod n+\sum(t-a-j-1)\bmod n+n$$

上述两个Σ 记号中, j=1, 2, …, n, 故 $t-a+j,t-a-j-1$ 分别遍历 $\bmod n$ 的完全剩余系, 故对于不同的行 a, 所得的行和相同.

其次验证列和固定, 仍然是 $\bmod n$ 的完全剩余系, 同理可证.

综上, 我们发现了一种计算奇阶幻方数字的新方法. 在计算机编程中, 不需要开辟空间巨大的二维数组, 而且简化了判断语句, 加快程序的运行速度. 更重要的是, 我们发现了奇阶幻方经典填法的循环模的本质, 对于幻方的认识更进一步.

· 科学史话 ·

无穷的故事

无穷, 从古代“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”的朴素思想, 到近代的极限、微积分、射影几何、集合论, 始终萦绕在平民百姓和数学工作者的心头.

日常生活中, 我们时常谈到“无穷”: 仰望天空, 无穷无尽; 时光流逝, 永不停息. 什么是无穷? 就是没有边界. 什么是无穷大? 就是没有比它再大的数. 可惜, 很多人学习数学后, 却忘记了无穷的来源, 问一些“无穷大到底有多大, 有没有比无穷还大的数”之类的无聊问题. 还有的人, 把“无穷”当做一个“特别大的数”, 提出所谓“无穷的四则运算法则”, 甚至利用它导出一些悖论, 都是毫无意义的.

要充分了解“无穷”, 就要了解无穷在数学世界中的起源和发展.

一 极限逼近: 无穷的朴素观念

我国古代数学家刘徽, 是第一个将“无穷”应用于数学研究的: 在使用割圆术计算圆周率时, “割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体而无所失矣”, 准确的体现了“划分越细, 误差越小, 当到达极限时, 就可以认为相等”的极限思想. 正是有了用增加正多边形的边数来逼近计算圆周率的方法, 才有了后来祖冲之的 3. 1415926.

无独有偶, 西方的阿基米德也提出了“无穷小量”的观念, 使用“穷竭法”解决圆的周长面积等一系列数学问题.

但是, 不久之后的“芝诺悖论”, 又动摇了无穷思想的根基. 一个人与乌龟赛跑, 人的速度大于乌龟, 人在 A 点, 乌龟在 B 点, 人为了赶上乌龟, 需要首先到达B 点, 此时乌龟又前进到了 C 点, 人再到达 C 点, 乌龟又前进了……如此往复, 人永远追不上乌龟!

问题出在哪里了呢? 现在, 我们清楚每次人龟前进的距离是一个无穷递缩等比数列, 这事实上是一个“等比数列求和”的问题, 无穷多项之和仍然是有限值. 但在古希腊时期, 这是难以理解的.

二 微积分: 无穷的首次数学化应用

为了解决物理中出现的下述一系列问题, 牛顿、莱布尼兹等创立了微积分.

1. 研究运动的时候直接出现的, 也就是求即时速度. 什么是即时速度? 需要注意, 在一个时间点, 时间和位移均为零, 没有速度可言; 所谓的即时速度, 不是质点"此时"的速度, 而是"此时附近的一段时间"的速度, 因此使用了位移与时间之比的极限值.

2. 求曲线的切线.

以上两类问题, 可以直接使用导数解决. 函数的导数就是图像此点处的斜率.

3. 求函数的极值.

同样是利用导数, 引入单调性的概念, 单调性的分界点称为函数的极值点. 对于多元函数, 我们引入了"偏导数", 就是固定其他变量, 只计算其中一个变量的导数, 从而求得函数取极值时, 此变量的一个与其他变量和常数有关的表达式, 代入消元, 重复以上过程. 这也是证明不等式的"导数法".

4. 求变力做功及运动方程.

牛顿创立了重要的"微积分基本定理". 定理的第一部分, 表明不定积分是微分的逆运算. 定理的第二部分, 表明定积分可以用无穷多个原函数的任意一个来计算. 这一部分有很多实际应用, 这是因为它大大简化了定积分的计算.

（1）关于原函数的导数:

设 f 为定义在闭区间$[a,b]$上的实数函数, 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则 F 在$[a,b]$可导, 且对任意 $x\in[a,b]$, $F'(x)=f(x)$.

（2）原函数与定积分的关系:

设 f 为定义在闭区间$[a,b]$上的实数函数, 设 F 为 f 的一个原函数, 是满足条件 $f(x)=F'(x)$的无穷个函数之一, 则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

5. 求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积.

要描述一个曲边图形的面积, 需要使用刘徽割圆术的思想, 用一种规则的图形去逼近. 我们通常采用矩形, 用垂直于 x 轴的直线将图形分成若干"条", 计算每条的面积并求和. 当条数足够多而每条的宽度足够小时, 便可以认为这个近似图形的面积等于原图形面积, 引入了"黎曼积分"的概念.

进一步, 数学家得到了一个重要的定理, 改变连续函数有限个点处的函数值, 函数的积分不变.

求曲线长, 首先要明确什么是"曲线的长度". 我们可以使用物理学的方法计算一段曲线均匀电线的长度: 首先称量单位长度电线的质量, 然后称量待测电线的质量, 作比即求得电线的长度.

在数学中, 我们可以引入"线密度"的概念, 将整条曲线分成若干小段, 每段看做一条线段, 对长度求和, 最后的极限值即为曲线长.

用数学公式表示, 设平面曲线 $f(x)$, 长度就是 $\int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+1}dx$, 其中 a,b 是曲线横坐标的上下限. 如果使用参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, 则长度为 $\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$, 其中 a,b 为参数 t 的上下限.

6. 物体的重心、两个体积不可忽略的物体间的引力.

这类问题, 需要使用"重积分"解决, 即二维、三维的积分, 将积分重复进行.

利用微积分工具, 可以严密的证明开普勒三大定律、一些重要物理定律. 例如高斯定理, 电场强度在一封闭曲面上的积分与该曲面所包围的电荷量成正比.

现代数学已经离不开微积分. 经典数学只是"静态"的固定状态, 微积分让数学"动起来", 能够研究一个过程的变化.

三 重建根基: 数学的严格定义

随着微积分的广泛应用, 数学界认为"无穷"和"极限"的理论已经相当完善.

可是, 盛世总是隐藏着危机, 真理总是伴随着挑战. 1734 年, 贝克莱出版了《分析学家; 或一篇致一位不信神数学家的论文, 其中审查一下近代分析学的对象、原则及论断是不是比宗教的神秘、信仰的要点有更清晰的表达, 或更明显的推理》.

在这本书中, 贝克莱对牛顿的理论进行了攻击. 例如他指责牛顿, 为计算 $f(x)=x^2$ 的导数, 先将 x 取一个不为 0 的增量 Δx, 由 $(x+\Delta x)^2-x^2$, 得到 $2x\Delta x+(\Delta x)^2$, 除以 Δx, 得到 $2x+\Delta x$, 最后令 $\Delta x=0$, 求得导数为 $f'(x)=2x$. 这是"依靠双重错误得到了不科学却正确的结果". 因为无穷小量在牛顿的理论中一会儿说是零, 一会儿又说不是零.

因此, 贝克莱嘲笑无穷小量是"已死量的幽灵". 贝克莱的攻击虽说出自维护神学的目的, 但却真正抓住了牛顿理论中的缺陷, 是切中要害的. 这就是"第二次数学危机".

十八世纪, 数学家们依然在危机中坚持前行, 因为这些基础理论的缺陷难以掩盖微

积分理论在实际应用中的巨大作用.

无穷级数等一系列概念被发明了, 但随之而来的是更大的矛盾：无穷级数 $S=1-1+1-1+\ldots$ 等于什么？由于我们不知道“最后一项”到底是 0 还是 1, 因此这个级数无法求值. 更为荒唐的是, 利用傅里叶得到的 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$, 令 $x=-1$, 竟然得到 $S=\frac{1}{2}$！当时数学界的混乱, 由此可见一斑.

问题的严重性在于, 当时的数学家们只是注重理论在实际计算中的应用, 几乎无人过问基础的问题, 例如级数收敛性的判定、微分方程解的存在性等.

十九世纪, 数学家提出了极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义. 数列 $\{a_n\}$ 的极限 A 定义为, 对于任意小的正实数 ε, 都能找到一个正整数 δ, 使得整数 $n>\delta$ 时, 都有 $|a_n-A|<\varepsilon$.

利用有理数的分划, 建立了严密的实数理论. 有理直线 Q 被分割成两个非空子集 A, A', 如果 A, A' 满足以下条件, A, A' 的组被称为有理数的分划.

$(1) r\in A, s\in A \Rightarrow r<s.$

$(2) r\in A, \exists t\in A, t>r.$

有理数的分划称为实数. 对于分划 $\langle A, A'\rangle$, 两种类型(a)没有属于 A’的最小有理数;(b)有属于 A’的最小有理数.

其中(b)型中, 存在有理数 $a=\langle A, A'\rangle$；而(a)型中, 实数 $\alpha=\langle A, A'\rangle$ 与任何有理数不同, 称为无理数.

由此, 还可以严格证明诸如“实数的连续性”“无限不循环小数是无理数”“实数的四则运算和大小比较”的我们耳熟能详的定理, 构建起实数理论的坚固根基, 宣告了第二次数学危机的彻底解决.

四 集合论：无穷的大小

与此同时, 康托等人建立了集合论, 引入了“无穷集合”的概念, 并以“一一对应”为原则, 建立了比较集合大小的规则.

他建立了“势”的概念, 利用势将无限集进行分类, 将两个可以一一对应的无限集称为同势. 最小的无限集是“可数集”, 亦即与自然数集同势的整数集、有理数集等.

证明有理数集是可数集的方法十分经典. 将所有有理数写成最简分数的形式, 根据分子分母的值把它们排成二维的阵列, 从 1/1 出发沿蛇形遍历所有的数, 第 n 个遍历到的数与自然数 n 相对应. 具体地说, $(j,k)\rightarrow n=\frac{1}{2}(j+k-2)(j-k-1)+k.$ 这样, 就在正整数集与有理数集之间建立了一一对应关系.

严格的说, 上述一一对应实质上证明了 N 与直积集合 $N\times N$ 的同势关系. 两个可数集合的直积是可数集合.

进一步的, 康托又证明了, 实数集合是不可数集合, 亦即实数集的势大于自然数集. 对于任意一个无限集, 可以构造势更大的集合, 因此不存在势最大的集合.

根据无限集的势的大小, 康托构造了一个无穷序列 $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots$, 其中可数集为首项 χ_0, 实数集为第二项 χ_1, 使无穷集合本身又构成了无穷序列.

这里要特别强调, 比较两个集合的势是否相等（通俗的说, 就是比较两个集合中的元素是否一样多）, 只需要给出两个集合的一种一一对应关系即可；反过来, 若要证明两个集合势不等, 则必须证明不存在这样的对应关系.

例如, 有的人提出“奇偶悖论”, 根据 $n\rightarrow 2n$, 可以将整数与偶数一一对应, 两个集合“元素一样多”；而根据 $n\rightarrow n$ 的对应, 显然整数集中还有剩余元素, 因此整数比偶数多. 矛盾？到底是哪个多？康托告诉我们：一样多！只要存在一种一一对应, 就认为两个集合等势.

康托证明实数是不可数集的方法是利用了反证法, 假设存在一种 $[0,1]\rightarrow N$ 的一一对应, 将列表上的数依次写成 0 到 1 间的小数, 排列成一张有序表 $a_1, a_2, \ldots$. 构造这样一个小数, 其小数点后第一位不等于 a_1 的第一位, 第二位不等于 a_2 的第二位…第 n 位不等于 a_n 的第 n 位, 则由于小数序列的无穷性, 可以构造这样的小数；这个小数显然在 $[0,1]$ 内, 但不在上述列表中, 矛盾.

这里给出一种证明实数区间是不可数集的一种新方法. 新的证明方法从一个博弈游戏出发, 在两个不同的数学领域间建立起了联系, 非常具有启发性.

A 和 B 两个人在实数区间 $[0,1]$ 上玩一个游戏. 首先, A 在 $[0,1]$ 中选一个数 a_1, 然后 B 在 $(a_1,1)$ 里选一个数 b_1；接着, A 在 (a_1,b_1) 中

选一个数 a_2, 然后 B 在 (a_2,b_1) 中选一个数 b_2……以后 A 和 B 轮流取数, 选的那个数必须位于前面两次选的数之间.

可以看到, 序列 $a_1,a_2,...$ 是一个单调递增的有界序列. 根据实数的稠密性, 游戏可以无限进行下去; 根据单调有界收敛准则, 数列 $\{a_n\}$ 最终会收敛到某一个实数 c. 游戏进行前, A 和 B 约定一个 $[0,1]$ 的子集 S, 规定如果最后 $c\in S$, 则 A 胜, 否则 B 胜.

如果 S 集为可数集的话, B 肯定有必胜策略. 如果 S 集可数, 那么 B 就可以把 S 集里的数排列成一个序列 $s_1,s_2,....$ B 的目标就是让序列 $\{s_n\}$ 的极限不等于 S 集里的任一个数. 考虑 B 的这样一个游戏策略: 当 B 第 i 次选数时, 如果选 s_i 符合规则, 那么就选它 (这样序列 $\{a_n\}$ 就不能收敛到它了); 否则如果这一步选 s_i 不合法, 那就随便选一个合法的数 (此时序列 $\{a_n\}$ 已经不可能收敛到 s_i 了). 这种策略就可以保证 A 选出的数列的极限不是 S 集里的任一个数.

有趣的事情来了. 假如 A 和 B 约定好的 S 集就是整个实数区间 $[0,1]$, 那么 B 显然不可能获胜; 但如果 $[0,1]$ 是可数集的话, B 是有必胜策略的. 于是我们就知道了, $[0,1]$ 是不可数集.

由于不可数集构成的集合仍然是不可数集, 实数集是不可数集.

我们通常将实数集称为连续统. 是否存在一个集合, 它的势比自然数集大, 比连续统小? 康托给出的答案是否定的, 但至今没有得到证明. 20 世纪后半叶, 数学家证明"连续统假设"在"ZF 公理系统"中不可能判定真假. 这仍然是一个未决问题.

五 罗素悖论: 无穷的公理化

1900 年, 庞加莱在世界数学家大会上, 郑重宣布: "我们可以说, 数学最终的严格性基础已经建立了. " 正当数学家沉浸于集合论的严密性中时, 罗素 1902 年提出的悖论, 动摇了整个数学大厦的基石.

一个集合 U, U 由所有不属于自身的集合构成, U 显然存在, 但 U 是否属于自身呢?

无论如何回答, 都会导致矛盾. 数学原本平静的水面, 因为罗素悖论的投入, 又一石激起千重浪, 这就是"第三次数学危机".

这次危机, 正是康托引以为豪的"无穷集合"引起的. 数学家提出了"公理化集合论", 后来形成了"无矛盾的集合系统", 简称 ZF 公理系统, 解决了第三次数学危机.

外延公理: 对于任意的两个集合 X,Y, 如果 X 的任一元是 Y 的元, Y 的任一元是 X 的元, 则 $X=Y$.

空集合存在公理: 存在一个没有任何元素的集合.

无序对集合存在公理: 对于任意集合 X,Y, 都存在集合 Z, 它的元素恰好是 X,Y.

并集合公理: 对于任意的集合构成的集合 X, 都存在一集合 Y, Y 的元素恰好是 X 的所有元素的元素.

幂集合公理: 对于任意的集合 X, 都有一个集合 Y, 使得 Y 的元素恰好是 X 的子集.

无穷公理: 存在一个集合, 它的元素恰好是全体自然数.

分离公理模式: 对任意的集合论公式 $A(z)$ 和任意的集合 X, 都存在集合 Y, 使得 Y 的元素恰好是由满足公式 $A(z)$ 且属于 X 的那些元素组成.

替换公理模式: 对于任意的集合论公式 $A(x,y)$, 如果对任意的集合 X, 都有惟一的集合 Y, 使得 $A(x,y)$ 成立, 那么对任意的集合 S_1, 有一集合 S_2, 使得 $S_2=\{u\mid t\in S_1, A(t,u)\}$. 也就是说, 若 $A(x,y)$ 具有一对一的性质, 这时, 对于任一集合 S_1, 由 S_1 中每一元素经 $A(x,y)$ 对应的值组成一集合.

正则公理: 对于任一非空集合 S, 都存在集合 Y, 使得 $Y\in S, Y\cap S=\varnothing$.

选择公理: 对任何由非空集合组成的非空集合 S, 存在函数 $f:S\to\cup S$ 使对每个 $x\in S$ 有 $f(x)\in S$, f 称作 S 的选择函数. 也就是说, 可以从一个子集族的每个集合中分别选出一个元素.

我们不能进行无限次操作, 从无穷个集合中分别选出一个元素, 因此有必要确定这样一个公理. 选择公理可用于证明"有限个可数集的并集仍然是可数集", 但这个看似显然的公理也会导致"分球悖论", 即可以将一个球切成无穷多块, 然后拼成两个与原来一模一样的球.

决定性公理: 自然数上具有完全信息的长度为 ω 的二人无穷零和对策有必胜策略. 由此公理, 可以推出连续统假设等一系列未

决命题. 它的正确性尚未得到公认.

20 世纪中叶, 数学家又提出了现代数理逻辑, "无穷小" 的概念在极限产生 300 年后, 重返数学舞台. 微积分的发展历程, 由原始的无穷小分析法, 到经典微积分的极限方法, 再到现代数学的无穷小分析法, 这正是数学 "螺旋中上升" 的发展历程.

六 无穷：从量变到质变

在欧氏几何中, 平行直线不相交, 是熟知的事实. 但是, 当遇到几何计算时, 每次都要特殊处理两直线平行的情况, 是很不方便的. 射影几何为了研究几何图形间的位置关系, 引入了 "无穷远点" 和 "无穷远直线", 定义两平行直线的交点为无穷远点, 所有无穷远点的集合为无穷远直线.

由于经过同一无穷远点的直线都平行, 中心射影和平行射影得以统一. 我们将这两种将一个图形沿直线映射为另一个图形的变换称为射影变换.

交比是射影几何中最基本的不变量. 射影变换中, 首先点和直线的位置关系保持不变；其次, 射影变换下交比不变. 在射影空间中, 无穷远点的集合是无穷远平面, 因此射影几何中没有 "平行" 的概念.

从这个角度来看, 无穷远是一种人为引入的抽象概念, 只是为了解决问题方便, 并不会影响到原有的欧氏几何体系.

在数学的其他领域, 例如概率, 也离不开无穷. 我们知道, 对于状态数有限的情况, 可以使用古典概型, 用待计算的状态数除以总状态数；但状态数达到无穷大, 例如在平面上随机选一个点、一条直线, 就不容易讨论了. 而且此时, 等可能事件的划分也将变得异常困难. 本刊下期将详细讨论此问题.

我们可以使用初等数论和数学归纳法证明, 存在任意长的素数等差数列, 但陶哲轩证明了不存在无穷长的素数等差数列. 由此可见, 无穷是有限的扩充, 很多问题到达无穷之后, 就会发生质的改变.

数学归纳法, 是 "量变到质变" 的最好体现. 为了证明与正整数有关的定理, 需要使用归纳公理, "一生二, 二生三, 三生万物". 归纳公理体系本身, 为了避免循环定义, 需要严密的推理；而归纳法的应用, 也是很有讲究的.

如果可以根据前面的 n 个元素构造第 $n+1$ 个元素, 但是不能改变前面, 那么问题对无穷成立, 因为存在一个有限量作为最小数；而前面所说的素数等差数列问题, 我们在构造 $n+1$ 时, 还改变了原来 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的取值. 当 n 有限时, 显然正确；但 $n \to \infty$ 时, $a_1 \to \infty$, 不存在有限量, 与"最小数原理" 矛盾, 所以这样的 "归纳" 是错误的.

七 无穷：宇宙与时空

"宇宙" 一词, 出于《庄子》, "宇" 指一切空间, 无边无际；"宙" 指一切时间, 无始无终.

古人认为, 宇宙是无限的；近代天文观测表明, 我们所看到的宇宙是有界的, 是一个有限无边的球体；而主流宇宙学则认为, 宇宙是平坦无限的. 根据大爆炸理论, 宇宙由一个 "奇点" 膨胀而来, 宇宙在不断扩张, 这也就避免了 "宇宙外面是什么" 的问题：宇宙在以光速扩张, 光所射到的最远地方, 就是宇宙的边界.

有些人提出了 "平行宇宙" 理论, 认为有很多平行运行、互不相干的 "宇宙", 这种提法是自相矛盾的, 因为 "宇宙" 就是包含我们所认识的所有事物, 是全集, 不可能存在其他在我们这个 "宇宙" 之外的东西. 而我们能认识到的东西, 就一定与之有信息联系, 例如它发出的光到达我们的接收设备. 如果一个所谓的 "平行宇宙" 与我们毫不相干, 那么就没有讨论的必要了, 因为它的存在与否根本无法验证.

时间的无穷与有穷也是人类争论的话题. 人们普遍认为, 宇宙起源于 137 亿年前的大爆炸, 在爆炸后的极短时间内, 温度骤降, 体积骤增, 逐渐形成基本粒子, 进而构成原子, 形成更复杂的原子和分子, 凝聚成星云, 恒星、行星就从这里诞生.

恒星演化到晚期, 会有物质抛入星际空间, 作为形成新恒星的原料；其余部分会在引力作用下发生坍缩, 形成白矮星、中子星、黑洞. 这一过程会使星际物质越来越少, 最终没有足够的物质与能量形成新恒星, 宇宙成为黑洞的世界.

对于黑洞的理解, 很多人认为 "进去之后, 就进入了另一个世界", 这是完全错误的. 首先, 任何物体进入黑洞后, 由于两侧距离引力中心的距离不同, 会产生巨大的引力差, 这个差值会将一切物体拉成长条, 在到达黑洞中心之前变成碎片.

其次, 黑洞 "视界" 内发出的光, 视界外不可能看到. 有人认为, 黑洞视界内部附近的光在 "穿越" 视界到达外面时不会花费太多能量, 因此可以看到. 这种观点忽略了广义相对论导致空间弯曲的事实. 在黑洞这种

强引力场作用下,空间会极度弯曲,两点之间不再是直线最短,因此视界内外的咫尺之遥,需要无穷大的能量,这显然是不可能的.这个视界就是光的能量与引力势能的相等点,可以根据牛顿第二定律计算半径.

第三,没有进入黑洞的“视界”,也不等于能够正常的在地球上那样.即使在视界之外,黑洞的引力场依然异常强大,光会强烈的弯曲,物质会难以阻拦的向黑洞加速,同时释放出强大的高能射线,这也是我们观察黑洞的重要手段.

第四,黑洞不是一个没有大小的“奇点”,而是一个星球,只是它的密度相当大,并且由于没有力能够阻止坍缩,体积在不断缩小,逐渐趋于零,这也是在向“无穷小”进军.

第五,进入黑洞的信息并未消失.有的人认为,黑洞只进不出,最终宇宙在大黑洞中终结,这是忽略了“黑洞蒸发”的事实.根据量子力学,信息量是守恒的,进入黑洞的物质虽然原有形态被破坏,但经过重组仍然具有信息量,但所形成的新物质形态完全不同于我们所说的宇宙.

经过漫长的黑洞蒸发,有能量的粒子会从黑洞中逸出,但这并不违反广义相对论,因为这些逸出的粒子不会回到原来的宇宙,而是永久的消失了.

有人认为,宇宙间存在万有引力,因此宇宙的半径会不断缩小,这是不正确的.当宇宙中物质的密度小于某个常数时,原有的能量就可以持续供给宇宙膨胀.正如无限大带电平板对电荷的作用力是有限量,无穷远处的电荷的作用力也是无穷小,求和之后有可能是有限值,因此宇宙中的物体不会受到无穷大的引力作用.

同时,部分科学家提出了“闭宇宙”理论,即四五百亿年后,宇宙的膨胀会停止,并随即开始收缩.这个“收缩”的过程类似电影重放,是真正的“时间倒流”,会将宇宙演化、发展的历史完整精确的倒退进行,最终进入“大暴缩”,收缩成一个奇点.

近来,还有科学家提出“螺旋宇宙模型”,认为螺旋是宇宙中最基本、最广泛的运动形态,而我们就生活在一个大漩涡中.这种曲线运动模型有别于传统的大爆炸直线运动模型,更能体现广义相对论的时空弯曲特点.

宇宙的中心,是人们争论不休的话题,从欧洲天主教的地心说,到哥白尼和布鲁诺的日心说,今天看来,这些显然都不是宇宙的中心.如果承认宇宙是无穷的,那么就没有中心,或者说每一点都是中心,因为在宇观尺度上各部分是完全相同的.即使宇宙不是无穷的,它是如此之大,如此之精细,以至于人类无法了解其全貌,也可以“无穷”地探索.

八 有限的无穷

很多人也许认为,无穷只是一种数学符号,在实际中并没有应用.但是,在计算机科学中,无穷确实是一个“有限量”,是可以参与计算和比较的.

例如,我们定义了一个二维矩阵,用矩阵中的a[i][j]表示点i到点j的距离.那么不可大的点,其距离是无穷大,但计算机中没有“无穷大”这个数,如果每次单独处理又太麻烦,于是我们令a[i][j]=MAXINT,即计算机允许的最大的正整数,对于int类型,就是$2^{63}-1$=2147483647.显然,这样大的数在实际运算中并不会出现,因此它比任何一个我们可能遇到的数都大——这也是无穷大的一种数学解释.

类似地,我们在计算机的浮点运算中,还可以定义“无穷小”,例如10^{-6},凡是小于这个限制的,即可视为“机器零”;两个浮点数比较,由于中间的运算舍入误差和精度限制,即使两个数本来应该相同,也可能出现微小的差别,这时便需要使用“误差”,小于此值时认为相等,这在计算几何中是十分必要的.

在实际应用中,根据计算所需规模和精度,人为设置“无穷大”“无穷小”,使其能够达到约束和标记的作用,也是可取的方案.

九 无穷:心灵的寄托

“接天莲叶无穷碧,映日荷花别样红”“离愁渐行渐无穷,迢迢不断如春水”“人生代代无穷已,江月年年只相似”“洞庭一夜无穷雁,不待天明向北飞”“哀吾生之须臾,羡长江之无穷”……单是含有“无穷”字眼的诗,就数不胜数,更不要说表现“无穷”之意的了.

人们为什么喜欢“无穷”作为心灵的寄托呢?正是因为它可望不可即,遥远空旷,有足够的想象空间.这样,诗人和游子便可以从世俗的羁绊中开脱出来,去追求属于自己的那一片心灵的田园,“乘天地之正,御六气之辩,而游于无穷”.这也许就是人们失意、无奈时,喜欢仰望天空,感叹“沧海一粟”的原因吧.

另一方面,个人的欲望也是无穷无尽的,

总是希望“更高,更快,更强”,于是与宇宙熵增的热力学第二定律相抗争,争取自身的熵减,则是一切生命无穷的使命.因此,才有了毛主席的“与天奋斗,其乐无穷;与地奋斗,其乐无穷;与人奋斗,其乐无穷”.

正是这种无穷的进取心,才使人类一往无前,无所畏惧的继续下去.宇宙赋予我们无穷的空间与时间,孕育着人类无穷的思想与创造,构造着生物进化与宇宙发展的无穷进程.从这方面来说,无穷是一种遐想,一种力量,一种进取心,一个驱使人类与自然斗争的动力的内在源泉.

十 无穷:辩证的哲学本质

“无穷”在数学发展史中,一直存在两种观念的争论:实无限与潜无限.

所谓潜无限思想是把无限看作永远在延伸着的,一种变化着成长着被不断产生出来的东西来解释.它永远处在构造中,永远完成不了,是潜在的,而不是实在.

所谓实无限思想是把无限的整体本身作为一个现成的单位,是已经构造完成了的东西,换言之,即是把无限对象看成为可以自我完成的过程或无穷整体.

数学中无限的历史实际上是两者争论的历史.亚里士多德只承认潜无限,在古希腊数学中占统治地位;我国的“日取其半,万世不竭”也有运动变化的色彩.

牛顿、莱布尼茨创建的微积分,使“实无限”统治数学三百年.正是因为“不变”的认识,产生了一系列悖论和数学危机.

到了十九世纪,微积分的基础被重建,无穷小被理解为“一个逼近的目标,可逐步逼近却永远达不到”,使潜无限重登历史舞台.今天我们所学的“无穷”,基本上就是“潜无限”的含义.

今天我们使用的无穷符号“∞”,传说是某个人站在莫比乌斯带上,向一个方向行走,就永远不会终止,这就是“无穷”.虽然这个传言并不属实,无穷的“潜无限”认识还是更容易被接受.

然而,在康托的无穷集合论中,无穷集合也被看作一个完整的、构造完成的整体,现实存在,这又有“实无限”的意味了.

我们不由得要问,到底是实无限还是潜无限?

从哲学角度看,实无限、潜无限是“无穷”这个整体的两面.无穷既是一个需要逐渐逼近的过程,又是一个实际存在的个体.正如光既是粒子又是波,无限也有其辩证的两面.如果说潜无限作为有限的延伸,是有限的否定,那么实无限则是对潜无限的否定.

有人说,人类探索数学的历程,就是逐步深入认识无穷的历程.我认为,人类哲学的发展与进步,来源于解开“无穷”奥秘的奋争与努力.

宇宙浩瀚无限,神奇深邃,对于宇宙的思索对于人类来说永远是一个巨大而永恒的谜,试图解开这个谜,正是人类无穷想象力和创造力的源泉.宇宙的奥秘也许永远不会被发现完全,我们只能一步步追寻世界的本质,趋近真理——这又是一种无穷.

·代数变形· 不等式证明的 SOS 方法

(本讲适合数学竞赛)

1 什么是 SOS

SOS 是英文“Sums of Squares”的缩写,意为“平方的和”,即将待证不等式化为若干个非负式之和.

$$f(a,b,c)=M(a-b)^2+N(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0.$$

SOS 是最朴素的不等式证明方法,它一般是将不等式左边减去右边,分式通分,再进行同类项合并,分解因式,借助非负式,尤其是完全平方式之和证明.这种方法看似笨拙,但在解决一类难度较高,利用著名不等式难以解决的问题上有奇特功效.

例 1 证明 $\dfrac{a_1-a_2}{a_2+a_3}+\dots+\dfrac{a_6-a_1}{a_1+a_2}\ge 0.$

证明:原式 $\Leftrightarrow \sum\dfrac{2a_1-a_2+a_3}{a_2+a_3}\ge 6$

$$\text{左边}\ge\frac{\sum(2a_1-a_2+a_3)^2}{\sum(2a_1-a_2+a_3)(a_2+a_3)}$$

$$=\frac{(2\sum a_1)^2}{2(\sum a_1a_2+\sum a_1a_3)}.$$

若证原式,只需证

$$2(\sum a_1)^2\ge 6\sum a_1a_2+6\sum a_1a_3.$$

$$\Leftrightarrow (a_1+a_4-a_2-a_5)^2+(a_1+a_4-a_3-a_6)^2$$
$$+(a_2+a_5-a_3-a_6)^2\geq 0.$$

在本题中,最后一步配完全平方就是SOS方法的应用.如何发现这样的完全平方?

首先,我们观察到展开式中 a_1a_2, a_1a_3 等隔一项,两项的均负,而 a_1a_4 等隔三项的均正.于是,联想到将隔三项的用+连接,而其余项数的用-连接.联系到和式中的6倍,考虑3个平方式产生3个 $2a_ia_j$ 的交叉项,将 $(a_1,a_4),(a_2,a_5),(a_3,a_6)$ 配对即得.

在本文中,经常出现 $\sum$ 循环求和记号,表示字母轮换,例如对三元的情况
$\sum a=a+b+c, \sum ab=ab+bc+ca.$

例2 $a,b,c\in R$,求证

$$2(1+abc)+\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$$
$$\geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

提示:对于根号,利用均值不等式放缩.

利用 $2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$
$$=2+2\sum a^2+2\sum a^2b^2+2a^2b^2c^2$$
$$=2(\sum bc-1)^2+2(\sum a-abc)^2\geq 0.$$

2 Schur 和

例3 证明 $\sum\dfrac{(a-b)(b-c)}{a+b+c}\geq 0.$

证明:换分母 $x=a+b+c$,
$y=b+c+d, z=c+d+a, w=d+a+b$

$$\Leftrightarrow \frac{(z-y)(w-y)}{x}+\frac{(w-z)(x-z)}{y}$$
$$+\frac{(x-w)(y-w)}{z}+\frac{(y-x)(z-x)}{w}\geq 0.$$
$$\Leftrightarrow yzw(z-y)(w-y)+xzw(w-z)(x-z)$$
$$+xyw(x-w)(y-w)+xyz(y-x)(z-x)\geq 0.$$

在本题中,使用了另一种SOS方法:配成Schur不等式 $\sum a(a-b)(a-c)$ 的形式,利用Schur非负数的和
$\lambda(b-c)^2+(a-b)(b-c)\geq 0$ 证明不等式.

上面换分母的做法值得称道.换分母的主要目的是简化分母,使得之后的通分工作变得更为简单.

Hint 对于二元函数
$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$,如果 $a,c>0, b^2-4ac<0$,则 f 恒正.

继续证明原题.原式

$$\Leftrightarrow L(z-x)^2+M(z-x)(w-y)$$
$$+N(w-y)^2\geq 0$$
其中
$L=xwz, M=(x-y)(xz+wy-wz)$,
$N=wxy$

因为 $L>0, N>0$,只需证 $M^2-4LN\leq 0$.
$LN=x^2w^2yz, |M|=|x-y||xz+wy-yz|$

代入得
$$|M|=|d-a||c^2-b^2+2ac+2bd+dc+ab$$
$$+bc|\leq |d-a|\cdot 2(a+b+c)(c+b+d)$$
$$=2|a-d|xy.$$
$$|M|^2\leq 4(a-d)^2x^2y^2\leq 4LN$$
$$\Leftrightarrow (a-d)^2y\leq w^2z$$
$$\Leftrightarrow (b+c+d)(a-d)^2\leq (d+a+b)^2(c+d+a)$$
$$\Leftarrow (b+c+d)(a^2+d^2)\leq (d+a+b)^2(c+d+a).$$

展开即证.

本题成功的关键在于,利用了二元二次函数判别式 $M^2-4LN\leq 0$,剥离取等条件.将取等的严格限制去除,剩下的部分就是严格的不等号,因此"放得很宽",容易证明.

例4 正实数 a,b,c,$a+b+c=3$,证明 $ab^2+bc^2+ca^2+abc\leq 4.$

证明:$ab^2+bc^2+ca^2+abc$
$$=b(a+c)^2+a(b-a)(b-c)$$
$$\leq b(3-b)^2\leq 4.$$

例5 $a,b,c\geq 0$,求证
$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca).$

证明:
$$a^2+b^2+c^2+2abc+1-2ab-2ac-2bc$$
$$=(a-1)^2+(b-c)^2+2a(1-a)(1-b)\geq 0.$$

这是因为 $1-a,1-b,1-c$ 两两相乘,总有一组为正,不妨设为 $1-a,1-b$.

3 配其他项

例6 已知 $a,b,c>0, a+b+c=3$,求证 $\dfrac{a}{2b+1}+\dfrac{b}{2c+1}+\dfrac{c}{2a+1}\leq\dfrac{1}{abc}$.

证明:左右两边同乘 $abc\Leftrightarrow \dfrac{a^2bc}{2b+1}\leq 1$

$\Leftrightarrow \sum ab^2-2\sum\frac{a^2bc}{2b+1}\ge\sum ab^2-2$

$\Leftrightarrow \sum(ca^2-\frac{2a^2bc}{2b+1})\ge\sum ab^2-2$

$\Leftrightarrow \sum\frac{ca^2}{2b+1}\ge\sum ab^2-2.$

左边 $\ge\frac{(\sum ca^2)^2}{\sum ca^2(2b+1)}=\frac{(\sum ab^2)^2}{\sum ab^2+6abc}.$

$\Leftrightarrow 6abc\ge(3abc-1)\sum ab^2.$

若 $3abc\le1$, 显然成立.

若 $\frac{1}{3}\le abc\le1$, 右边

$\le(3abc-1)(4-abc)\le6abc.$

本题中, 左右两侧同时配上了 $\sum ab^2$, 是一个亮点. 目的是消去 4 次项, 变成 3 次项, 进而使用Cauchy 不等式推论. 最后一步仍然是分类讨论, 分解因式, 使用非负数的积.

4 提取平方式

例 7 a,b,c 为非负实数, 至多 1 个为 0.

求证: $\sum\frac{a^2(b+c)^2}{b^2+c^2}\ge2\sum ab.$

证明: 令

$f(a,b,c)=M(a-b)^2+N(b-c)^2+L(c-a)^2.$

左边-右边 $=\sum a^2+\sum\frac{2a^2bc}{b^2+c^2}-2\sum ab$

$=\frac{1}{2}\sum(a-b)^2+\sum\frac{2a^2bc}{b^2+c^2}-bc$

$=\frac{1}{2}\sum(a-b)^2+\sum\frac{bc}{b^2+c^2}(a^2-b^2+a^2-c^2)$

$=\frac{1}{2}\sum(a-b)^2+\sum(a^2-b^2)(\frac{bc}{b^2+c^2}-\frac{ca}{c^2+a^2})$

$=\frac{1}{2}\sum(a-b)^2+\sum(a+b)(a-b)$

$\frac{(a-b)(ab-c^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$

$=\sum(a-b)^2\frac{(c^2-ab-bc-ca)^2}{2(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\ge0.$

在本题中, 将 $\frac{1}{2}\sum(a-b)^2$ 提取出来, 是至关重要的. 提取 $\sum(a-b)^2$ 的目的在于配成 SOS 完全平方式的和的形式, 而前面的 $\frac{1}{2}$, 是考虑到 $\sum\frac{1}{2}(a-b)^2=\sum a^2-\sum ab$, 恰好凑出原式中的平方项.

另证: 原式

$\Leftrightarrow\sum\left(\frac{a^2(b+c)^2}{b^2+c^2}+(b+c)^2\right)\ge2(a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\sum\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2}\ge4(a+b+c)^2.$

这是注意到

$\sum(a+b)^2+2\sum ab=2(a+b+c)^2$.

另外, 本题及其他很多不等式问题还可以用调整法解决, 调整法也是一种证明不等式的常用策略, 请参考笔者相关文章.

5 换元法

例 8 $a,b,c\ge0$, 求证

$\sum(a^2-bc)\sqrt{b+c}\ge0.$

证明: 设

$b+c=x^2,c+a=y^2,a+b=z^2.$

$\sum((-x^2+y^2+z^2)^2-(x^2-y^2+z^2)$

$(x^2+y^2-z^2))x\ge0.$

$\Leftrightarrow\sum(y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2)x\ge0.$

$\Leftrightarrow\sum(x^4y+xy^4-x^2y^2-x^2y^2)\ge0$

$\Leftrightarrow\sum xy(x+y)(x-y)^2\ge0.$

本题中, 换元的目的显然是为了去掉难看的根号, 变成易于处理的整式. 有时, 复杂的分式也可以换元.

例 9 $a,b,c\ge0$, 求证

$2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge$

$(a+1)(b+1)(c+1)(abc+1).$

提示: 利用卡尔松不等式

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge(abc+1)^3$.

原式

$\Leftrightarrow\frac{a^2+1}{a+1}\cdot\frac{b^2+1}{b+1}\cdot\frac{c^2+1}{c+1}\ge\frac{abc+1}{2}$, 代换得

$(\frac{t^2+1}{t+1})^3\ge\frac{t^2+1}{2}\Leftrightarrow2(t^2+1)^3$

$-(t+1)^3(t^2+1)\ge0$

$\Leftrightarrow(t-1)^4(t^2+t+1)\ge0.$

例 10 $a,b,c\in R^+$, 求证

$$\sqrt{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}$$

$$\geq 1+\sqrt{1+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})}}.$$

解:令 $S_1=\sum a, S_2=\sum ab, S_3=abc.$

原式

$$\Leftrightarrow \sum a\sum\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{\sum a\sum\frac{1}{a}}+\sqrt{\sum a^2\sum\frac{1}{a^2}}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{S_1S_2}{S_3})^2\geq (2\sqrt{\frac{S_1S_2}{S_3}}+$$

$$\sqrt{\frac{(S_1^2-2S_2)(S_3^2-2S_1S_2)}{S_3^2}})^2$$

$$\Leftrightarrow S_2^3+S_1^2S_3-4S_1S_2S_3$$

$$\geq 2\sqrt{S_1S_2S_3(S_1^2-2S_2)(S_2^2-2S_1S_3)}$$

只需证

$S_1S_3(S_1^2-2S_2)+S_2(S_2^2-2S_1S_3)\geq 0$,用均值不等式即可解决.

例 11 $a,b,c\in R^+$,求证

$$\sum a+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{6\sum a^2}{\sum a}.$$

引理:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

证明:由于 $\frac{a^2}{b}-2a+b=\frac{(a-b)^2}{b}$,

原式

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}$$

$$\geq\frac{2}{a+b+c}\sum(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a+b}{c}-1)(b-c)^2+(\frac{a+c}{b}-1)(a-b)^2$$

$$+(\frac{b+c}{a}-1)(a-c)^2\geq 0.$$

回到原题. 令 $A=\frac{a+b}{c}-1, B=\frac{b+c}{a}-1$,

$C=\frac{a+c}{b}-1$. 由于 $B+C>0$,不等式两端同乘 $B+C$ 得

$$((a-c)B+(a-b)C)^2$$

$$+(b-c)^2(AB+BC+CA)$$

而 $AB+BC+CA$

$$=3+\frac{\sum a^3+3abc-\sum bc(b+c)}{abc}\geq 3.$$

本题值得关注的一点是“不对称处理”. 对于形式为对称式的不等式,首选的方法当然是对称处理,力求保持各变量之间的平等. 但对称处理无法奏效时,就需要尝试不对称处理,人为打破变量之间的平等地位,使得特殊的变量突出出来. 这样的方法通常适用于取等条件不在变量相等处,不符合均值原理的不等式问题. 本题中不等式两端同时乘上 $B+C$ 就是这一方法的应用.

6 把握放缩的力度

例 12 $a,b,c,d\geq 0$,其中至多 2 个为 0. 求证:$\sum\frac{a-b}{a+2b+c}\geq 0.$

证明:原式 $\Leftrightarrow \sum\frac{3a+c}{a+2b+c}\geq 4$

左边

$$\geq\frac{(\sum 3a+c)^2}{\sum(3a+c)(a+2b+c)}$$

$$\geq\frac{(4\sum a)^2}{\sum(3a^2+c^2+6ab+4ac+2bc)}$$

$$=\frac{(4\sum a)^2}{4\sum a^2+8\sum ab+8ac+8bd}=4.$$

本题看似简单,事实上第一步变形是巧妙的. 将原式加 $\frac{1}{2}$,再乘 2,才得到这个等价式. 为什么要加 $\frac{1}{2}$,而不是通常的 1 呢?

因为我们要消去分子中“减”的项,所以需要一个 $-b$ 的对称项 $+b$. 而加 1,会导致分子变成 $2a+b+c$,使用 Cauchy 不等式后,会“放过头”.

那么,为什么恰好将分子中负的部分消去就可以,而不能多加呢?这与 Cauchy 不等式的“放缩力度”有关.

例如,不等式

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ 同时存在,那么哪个不等式放缩的力度更大呢?

由于 $\frac{1}{3}(a+b+c)^2\geq ab+bc+ca$,事实上第二个不等式可以分两步放缩,这个排

序不等式本身还隐藏着一个“中间量”，这也许是很多人使用排序不等式放过头的原因.

回到原题，如果我们多加了，Cauchy 不等式推论会舍弃更多的东西，如果展开，会发现多出来的是一些 SOS 完全平方项之和，这些东西在等号成立时并不存在，所以表面上没有破绽；但事实上等号不成立时，那些累赘的东西会导致放过头. 因此不论是添加项还是放缩，都应该遵循“越少越好”的原则，尽量减少放缩次数，降低放缩力度.

7 有范围的不等式

例 13 已知 $a,b,c\in[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}]$，求证

$$\frac{3}{a+2b}+\frac{3}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}\ge \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}.$$

证明：$\sum\frac{3}{a+2b}\ge\sum\frac{2}{a+b}$

左边−右边$=\sum\frac{a-b}{(a+2b)(a+b)}$

$$=\sum\frac{a-b}{6ab-(a-b)(2b-a)}\ge\sum\frac{a-b}{6ab}$$

$$=\sum\frac{ab-bc}{6abc}=0.$$

本题又是一个“看似简单”的不等式，但没有接触过此类方法时，会感到不等号前的那一步变换不可思议. 事实上，这正是应用了条件 $[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}]$.

我们想，题目给出的取值范围关于 1 对称，而 1 恰好是等号成立处；区间中末端是前端的 2 倍，这样好的条件一定要利用，于是我们配出了 $2b-a$，又因为 $a=b$ 时等号成立，需要 $a-b$，根据正负，需要减号，考虑有二次项和交叉项的恰好是分母，变换后剩下的部分又是易于处理的 $6ab$，问题迎刃而解.

最后一步中，分子分母同乘以 c，并不困难，事实上只要通分就能消去. 有时简化的求和符号 $\sum$ 并不容易看出式子的特征，分析过程中，可以将项数不多的式子拆开来写，答题时为了清楚再使用省略记号.

8 提取公因式

例 14 已知 $a,b,c>0$，求证

$$\sum\frac{a^2}{b^2+c^2}\ge\sum\frac{a}{b+c}.$$

证明：$\sum(\frac{a^2}{b+c}-\frac{a}{b+c})$

$$=\sum\frac{a^2b+a^2c-ab^2-ac^2}{(b^2+c^2)(b+c)}$$

$$=\sum(\frac{ab(a-b)}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{ab(b-a)}{(c^2+a^2)(c+a)})$$

$$=\sum ab(a-b)$$

$$\frac{a^2c+ac^2+a^3-b^3-b^2c-bc^2}{(b^2+c^2)(b+c)(b^2+c^2)(c+a)}$$

$=ab(a-b)^2(...)\ge 0.$ （李新未 解答）

可以看出，这个解法是为了提取公因式 $(a-b)^2$，达到配 SOS 的目的. 我们首先提取了一个 $(a-b)$，然后再寻找第二个. 最后剩下的部分，中间全是+号，保证为正.

另证：不妨设 $a\ge b\ge c$.

左边−右边$=\sum\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{(b^2+c^2)(b+c)}$

$$=(a-b)(\frac{ab+ac}{(b^2+c^2)(b+c)}-\frac{ab}{(c^2+a^2)(c+a)}-\frac{ca}{(a^2+b^2)(a+b)})+(b-c)(\frac{ac}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{bc}{(a^2+c^2)(a+c)}-\frac{ca+ab}{(a^2+b^2)(a+b)}).$$

我们通常使用的 SOS 包括 $(a-b)^2,(b-c)^2$ 等平方和，$(a-b)(b-c),(a-b)(a-c),(b-c)(a-c)$ 等 Schur 和，并注意两者之间的关系.

例 15 $a,b,c>0$，求证

$$\sum\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}\ge\sum a.$$

证明：左边−右边$=\sum\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}-a$

$$=\sum a\frac{ab-b^2+ac-c^2}{b^2+c^2}$$

$$=\sum(a-b)(\frac{ab}{b^2+c^2}-\frac{ab}{c^2+a^2})$$

$$=\sum(a-b)ab\frac{a^2-b^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$$

$$=\sum\frac{ab(a+b)(a-b)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\ge 0.$$

本题仍然是提取公因式 $(a-b)^2$，可见 SOS 已经成为一种固定的解题方法.

练习 已知 $a,b,c\ge 0,$ 至多一个为 0，求证 $\sum\frac{1}{a^2+bc}\ge\frac{3}{ab+bc+ca}$.

提示：首先观察本题的特征，寻找取等条件. 较为特殊的是，当一个为 0，另两个相等时等号成立，这意味着提出的公因式中一定含有形如 $\lambda c(a-b)^2$ 的项.

本题仍然是提取公因式，但项数较多，在通分拆项时应注意按照某个字母的降幂排列，以免发生混乱. 提取公因式时，也要先在每个系数中操作，再进行合并.

例 16 已知 $a,b,c>0$，求证

$$\sum\frac{a^2}{bc}\ge\frac{3\sum a^3}{2\sum a^2}.$$

证法 1：$\sum\frac{a^2}{b+c}\ge\frac{3}{2}\cdot\frac{\sum a^3}{\sum a^2}$

左边 $=\sum\frac{a^6}{a^4(b+c)}\ge\frac{(\sum a^3)^2}{\sum a^4(b+c)}$

$$\Leftarrow\frac{\sum a^3}{\sum a^4(b+c)}\ge\frac{3}{2\sum a^2}$$

通分，整理，$\sum(a+b)(a-b)^4\ge 0$.

证法 2：左边−右边

$$=\sum\left(\frac{a^2}{b+c}-\frac{3a^3}{2\sum a^2}\right)$$

$$=\sum a^2\left(\frac{1}{b+c}-\frac{3a}{2\sum a^2}\right)$$

$$=\sum a^2\frac{2\sum a^2-3a(b+c)}{2(\sum a^2)(b+c)}$$

$$=\sum a^2\frac{(a-b)(a-2b)+(a-2c)(a-c)}{2\sum a^2(b+c)}$$

$$=\sum\frac{a-b}{2\sum a^2}\left(\frac{a^2(a-2b)}{b+c}-\frac{b^2(b-2a)}{a+c}\right)$$

$$=\sum\frac{(a-b)^2}{2\sum a^2}((a^2+b^2-ab)c$$

$$+(a+b)(a-b)^2).$$

提示：SOS 的两种常用形式

① $M(a-b)^2+N(b-c)^2+L(a-c)^2$

② $M(b-c)^2+N(a-b)(a-c)$.

例 17 $a,b,c\ge 0$，求证

$$3(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)$$

$$\ge 1+abc+a^2b^2c^2.$$

提示：$3(a^2-a+1)^3\ge a^6+a^3+1$

$\Leftrightarrow (a-1)^4(2a^2-a+2)\ge 0$.

注意 $\prod(a^2+ab+b^2)\ge(\sum ab)^3$.

9 用正项抵消负项

例 18 $a,b,c>0$，求证

$$\sum\frac{1}{b+c}\ge\sum\frac{a}{a^2+bc}.$$

证明：不妨设 $a>b>c$.

左边−右边 $=\sum\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(a^2+bc)}$

$$=\sum(a-b)\left(\frac{a-c}{(b+c)(a^2+bc)}-\frac{b-c}{(c+a)(b^2+ca)}\right)$$

$$=\sum(a-b)((a^2-c^2)(b^2+ca)-$$

$$(b^2-c^2)(a^2+bc))/\ldots$$

$$=\sum(a-b)^2(c^2(a+b)+c(a^2+ab+b^2)-c^3)$$

$$/\ldots\ge 0.$$

此处省略了庞大的分母(为正).

本题的难点在于，拆出的和式中有正有负，不能直接提取公因式，所以需要将原式打开重组，用正的项去抵消负的项，每个正项“分担”一部分，最后“负不抵正”.

再如，$\sum(a+c-b)(a-c)^2$ 这个 SOS，设出大小关系后，$(a+b-c)(a-b)^2>0$，而 $(a+c-b)(a-c)^2>-(b+c-a)(b-c)^2$.

练习 $a,b,c>0$，求证

$$\sum\frac{1}{b+c}\ge\sum\frac{2a}{3a^2+bc}.$$

提示：本题与上题形式酷似，但本题的项数要多得多，需要更多的耐心和观察技巧，化简能力.

例 19 求证 $\sum xy\cdot\sum\frac{1}{(x+y)^2}\ge\frac{9}{4}$.

证明：原式

$$\Leftrightarrow\frac{4\sum xy}{(x+y)^2}\ge 9\Leftrightarrow 4\sum\frac{z(x+y)+xy}{(x+y)^2}\ge 9$$

$$\Leftrightarrow\sum\left(\frac{4z}{x+y}+\frac{4xy}{(x+y)^2}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{2(z-x)+2(z-y)}{x+y}-\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\ge 0$$

$\Leftrightarrow \sum(x-y)(\frac{2}{y+z}-\frac{2}{x+z})$

$-\sum\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(\frac{2}{(x+z)(y+z)}-\frac{1}{(x+y)^2})\geq 0$

不妨设 $x\geq y\geq z$, 则

$(x-z)^2(\frac{2}{(x+y)(y+z)}-\frac{1}{(x+z)^2})\geq 0.$

考虑 $(y-z)^2(\frac{2}{(x+y)(x+z)}-\frac{1}{(y+z)^2})$

$\because (x-z)^2\geq (y-z)^2$

$\therefore$ 只需证右侧相加 ≥ 0.

通分得 $2(x+z)^2(y+z)-(y+z)^2(x+y)$

$-2(y+z)^2(x+z)+(x+z)^2(x+y)\geq 0$.

习题 求证

$a^3+b^3+c^3+3abc\geq\sum(a^2b+ab^2).$

例 20 求证

$a^3+b^3+c^3+3abc\geq\sum bc\sqrt{2(b^2+c^2)}.$

证法 1: 找到中间量

$a^3+b^3+c^3+3abc\geq\sum\frac{(b+c)^2}{2}$

$\geq\sum bc\sqrt{2(b^2+c^2)}$

$=\sum bc\frac{(b-c)^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+(b+c)}$

证法 2

要配成 $\sum a(a-b)(a-c)\geq 0$ 的形式,

$\sum a(a-b)(a-c)\geq\sum bc\sqrt{2(b^2+c^2)}$

$-\sum bc(b+c)$

只需证: 右边 $\leq\sum\frac{bc(b-c)^2}{2(b+c)}$

$\because \sqrt{2(b^2+c^2)}\geq b+c$

$\therefore$ 只需证

$\sum(\frac{b+c-a}{2}-\frac{bc}{2(b+c)})(b-c)^2\geq 0$.

不妨设 $a\geq b\geq c$, 则只需证

$\frac{a^2+c^2+ac-b(a+c)}{2(a+c)}$

$+\frac{b^2+c^2+bc-a(b+c)}{2(b+c)}\geq 0$

通分, 合并同类项, 分子分母均为正.

10 判别式法

本文例 3 中, 已经介绍了二元二次函数正负的判别式法.

例 21 已知 $x_1,\ldots,x_n>0, y_1,\ldots,y_n>0$, 记 $X=\sum x_i$, $Y=\sum y_i$, 证明:

$2XY\sum\sum|x_i-y_j|\geq X^2\sum\sum|y_i-y_j|$

$+Y^2\sum|x_i-x_j|.$

提示: 采用离散化的思想, 将所有 x_i, y_j 放在一起排序, 将 x_i-x_j, x_i-y_j 划分成若干小段, 统计每个小段出现的次数.

具体来说, 设某位置左侧有 a 个 x_i, c 个 y_j, 右侧有 b 个 x_i, d 个 y_j, 满足 $a+b=m, c+d=n$, 则此小段被统计的次数为

$2(a+b)(c+d)(ad+bc)-(a+b)^2cd$

$-(c+d)^2ab=(ad-bc)^2\geq 0.$

然后证明 $2mn□\geq m^2△+n^2○$. 证明过程中, 使用数学归纳法, 注意凸函数的性质.

本题解法较繁, 但最关键的思想在于离散化, 就是先排序, 分成若干小段, 再按照各小段的“贡献”求和.

例 22 $a,b,c,x,y,z\in R$, 求证

$4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2)$

$\geq 3(bcx+acy+abz)^2$

证明: 左边−右边, 令

$f(x)=(4(b^2+y^2)(c^2+z^2)-3b^2c^2)x^2$

$-6abc(cy+bz)x+4a^2(b^2+y^2)(c^2+a^2)$

$-3a^2(cy+bz)^2.$

判别式

$\Delta=36a^2b^2c^2(cy+bz)^2-4(4(b^2+y^2)$

$(c^2+z^2)-3b^2c^2)(4a^2(b^2+y^2)(c^2+a^2)$

$-3a^2(cy+bz)^2).$

$=-16(b^2+y^2)(c^2+z^2)(4a^2(b^2+y^2)$

$(c^2+z^2)-3a^2(cy+bz)^2-3a^2b^2c^2)$

$=-16a^2(\ldots)(\ldots)((bc-2yz)^2+(bz-cy)^2)$

$\leq 0.$

故左边−右边恒非负, 命题得证.

例 23 $a,b,c,d\in R$, 求证

$6\sum a^2+(\sum a)^2\geq 12(ab+bc+cd)$.

证明:左边-右边,令

$f(a)=7a^2+2(c+d-5b)a+7b^2+7c^2$

$+7d^2+2bd-10bc-10cd$.

判别式

$\Delta=4(c+d-5b)^2-7(7b^2+7c^2+7d^2$

$+2bd-10bc-10cd)$

$=48(-4c^2-4d^2-2b^2-2bd+5bc+6cd)$

再令

$g(x)=4d^2-2(3c-b)-5bc+4c^2+2b^2$,

求其判别式

$\Delta=4(3c-b)^2-4\cdot 4d^2(4c^2+2b^2-5bc)$

$\geq 0\Leftrightarrow (b-c)^2\geq 0$.

本题使用了两次求判别式,是因为第一次求出的判别式不易证明其非负.这种方法类似于导数中的二次求导.

事实上,第一次的判别式可以配方:

$\Delta=-48((a+d-c)^2+(a-\frac{c}{2})^2+(d-\frac{c}{2})^2$.

显然,这种配方方法是不易想到的.

本文所述的 SOS 方法,是一种古典而不失一般性的不等式证明策略,充分体现了解题者代数变形的技巧.近几年竞赛中难度较高的不等式问题,尤其是不满足均值原理的怪题,大多可用 SOS 方法破解.我们有理由相信,SOS 将成为继调整法之后的又一个不等式问题通法.

不等式问题越来越困难,其核心原因就是界越来越紧,能够舍掉的东西不多,如果直接使用著名不等式会放过头.因此,SOS 作为一种深入表达式内部,逐步精细放缩的策略,必将在未来的竞赛试题中大放异彩.

(本文根据 徐泽 讲课笔记整理)

徐泽 2009 年中国数学奥林匹克满分金牌,由石家庄二中保送至北京大学数学系.

·平面几何·

四边形的面积公式

(本文适合数学竞赛)

我们都知道在三角形中,关于三角形的面积,有著名的海伦公式

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,其中

$p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

在四边形中,也有类似的表达.首先考虑圆内接四边形.设圆内接四边形 $ABCD$ 的边长 AB,BC,CD,DA 依次为 a,b,c,d,则有 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

证明:圆内接四边形 $ABCD$ 的面积

$S=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle BDC}$

$=\dfrac{1}{2}ad\sin A+\dfrac{1}{2}bc\sin C$.

因为 $ABCD$ 内接于圆,

$\angle A+\angle C=180^\circ$,故 $\sin A=\sin C$.

从而 $S=\dfrac{1}{2}\sin A(ad+bc)$.

两边平方 $S^2=\dfrac{1}{4}\sin^2 A(ad+bc)^2$

$4S^2=(1-\cos^2 A)(ad+bc)^2$

$4S^2=(ad+bc)^2-\cos^2 A(ad+bc)^2$.①

在 $\triangle ADB,\triangle BDC$ 中应用余弦定理得

$DB=a^2+d^2-2ad\cos A$

$=b^2+c^2-2rs\cos C$.

由于 $\cos C+\cos A=0$,整理得

$2\cos A(ad+bc)=a^2+d^2-b^2-c^2$.

代入①,得

$4S^2=(ad+bc)^2-\dfrac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$

$16S^2=4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$

分解因式,得

$16S^2=(2(ad+bc)+a^2+d^2-b^2-c^2)$

$(2(ad+bc)-a^2-d^2+b^2+c^2)$

$=((a+d)^2-(b-c)^2)((b+c)^2-(a-d)^2)$

$=(a+d+b-c)(a+d+c-b)$

$(b+c+a-d)(b+c-a+d)$

令 $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$,即得

$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$.

而对于一般的四边形,可以用类似的方法得到面积公式

$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$

$-abcd\cos^2\dfrac{A+C}{2}$

这里 $\dfrac{A+C}{2}$ 是对角和的一半, 与 $\dfrac{B+D}{2}$ 的余弦值相同.

证明: $S=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle BDC}$

$$=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C.$$

两边平方, 得

$$4S^2=a^2d^2\sin^2 A+b^2c^2\sin^2 C+2abcd\sin A\sin C. \quad ②$$

由余弦定理, 得

$$a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$$

移项, 两边平方得

$$\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2-d^2)^2=a^2d^2\cos^2 A+b^2c^2\cos^2 C-2abcd\cos A\cos C.$$

上式与②相加得

$$4S^2+\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=(ad)^2+(bc)^2-2abcd\cos(A+C). \quad ③$$

由于 $\cos(A+C)=2\cos^2\dfrac{A+C}{2}-1$,

$$③=(ad+bc)^2-4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

移项, 分解因式得

$$16S^2=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

令 $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$, 原式得证.

由于四边形内接于圆时, 对角和为 $180°$, 而 $\cos^2\dfrac{A+C}{2}\geq 0$, 故四边形的边长确定时, 当且仅当四边形内接于圆时, 四边形的面积取得最大值.

显然, 任意给定可以形成四边形的四条边长, 一定可以形成一个圆内接四边形. 因此这个最小值是可以取到的.

我们还发现, 当 $d=0$ 时, 四边形面积公式就化为海伦公式. 因此海伦公式是四边形面积公式的特例.

利用余弦定理对 $\cos^2\dfrac{A+C}{2}$ 代换, 可得

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-\frac{1}{4}(ac+bd+pq)(ac+bd-pq).$$

其中 p,q 为四边形的两条对角线长.

至此, 给定四边形的四条边和一组对角和, 或者给定四条边和两条对角线, 我们都可以求出四边形的面积.

在本题的求解过程中, 用到了余弦定理和分解因式, 这些手段正是本刊上篇文章所述的“不等式证明的 SOS 方法”. 由此可见, 观察表达式特征, 利用适当的变换, 可以大大简化证明, 降低计算复杂度.

· 数海拾贝 ·

$\sqrt{i}$ 存在吗

我们知道, 为了解决二次方程无解的问题, 引入了 $i=\sqrt{-1}$, 将数系由实数扩充到复数. 可曾想过, $\sqrt{i}$ 又会是怎样的东西呢?

数学老师给出的结论是, $\sqrt{i}$ 目前没有定义, 即使定义了 $\sqrt{i}$, 也没有研究价值. 复数 $\sqrt{-1}$ 有价值是因为在高等数学的偏微分方程和物理学中的电磁场方程, 化学中的薛定谔方程中有着重要应用, 同时在中学数学解题中也可以起到辅助工具的作用.

难道 $\sqrt{i}$ 真的不存在吗?我们首先假设 $\sqrt{i}$ 是一个复数, 即 $\sqrt{i}=a+bi$, 则有 $i=(a+bi)^2$. 根据实虚部分别相等, 我们得到了一个关于待定系数 a,b 的方程组

$$\begin{cases}a^2-b^2=0\\2ab-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|=|b|\\ab=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

我们惊奇的发现, 这个方程组是有解的, 这意味着 $\sqrt{i}$ 不是什么新创造的数, 而是一

个实实在在的复数!

如果仿照实数系中的定义,将实部为正的那个复数看作 i 的平方根,则有

$$\sqrt{i}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

而对于任意复数 $a+bi$,它的平方根是否存在呢?

设 $(x+yi)^2=a+bi$,则有

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a\\4x^2y^2=b^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2=y^2+a\\4(y^2+a)y^2=b^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(y^2)^2+4ay^2-b^2=0.$$

这个二次方程 $\Delta=(4a)^2+16b^2\ge 0$,故必有两实根;而由于 $f(0)=-b^2\le 0$,故至少有一非负实根 $y^2=y_0$,此时可求得 y 的取值,代入 $2xy=b$ 易知 x 存在. 因此,任意复数都有复数域中的平方根.

进一步我们可以发现,复数系中的运算具有封闭性,即用复数进行加减乘除,乘方开方运算,所得的结果均为复数,而不会产生“新数”. 而整数,有理数,实数等数集都不具备封闭性. 因此,复数系是一个空前完备的数系,至少在初等数学的范围内,已经彻底解决了方程无解和表达式无意义的问题,为我们处理问题的模式化提供了方便.

·组合构造·

图论中的奇偶

(本讲适合数学竞赛)

本文所称的图,是指有若干个理想点和它们之间的理想边组成的抽象图形,每两点之间至多连一条边. 图中顶点的个数称为图的阶,每个顶点所连边数称为顶点的度.

在图论中,很多结论都与奇偶相关.

1 度数均为偶数的图

我们把顶点的度数全为偶数的图叫做“偶图”.

定理 设 G 是有 p 个顶点和 q 条边的连通图,则偶子图(含空图)的个数为 2^{q-p+1}.

证明:用数学归纳法. 当 $q=p-1$ 时,这个图成为树,必有度为 1 的叶子节点. 只有空图是偶子图.

假设 $q=k$ 时命题成立,共有 2^{k-p+1} 个偶子图. 再加入一条边 e. 显然,原来的 2^{k-p+1} 个偶子图是不会消失的. 令 S 是包含 e 的子图. 由于 G 是连通图,加入一条边 e 后,新图中一定存在包含 e 的环. 对于环的每一条边,按照 S 是否包含取反:若 S 不包含这条边,则将其添加到 S;若 S 包含这条边,则将其去除. 显然,这样操作后的子图为偶子图当且仅当原图为偶子图. 因此包含 e 的偶子图与不包含 e 的偶子图一一对应. 故 $q=k+1$ 时偶子图的个数为 $2^{k+1-p+1}$,由归纳法知命题成立.

2 环长均为奇数的图

把顶点度数均为奇数的图称为奇图.

定理 奇图中不存在有公共边的环.

证明:假设两个环 C_1,C_2 有公共路径 $A_1A_2\ldots A_k$. 若公共路径长度为奇数,由于 C_1,C_2 的周长均为奇数,非公共路径部分长度均为偶数,则两环除去公共路径的部分可以连接成一个环,它的长度是偶数,矛盾. 若公共路径长度为偶数,非公共路径部分长度均为奇数,其和仍然是偶数,矛盾.

这样的性质是巧妙的. 如果将每个环收缩为一点,整个图会变成一棵树. 由于树的处理比图要方便很多,这样的模型很有效.

·组合构造·

二分图

(本讲数学信息学综合)

如果一个图中不存在奇环,则这个图的顶点集可以被分为两个不相交的子集,使得两个子集之间没有边相连,称为二分图.

证明:不妨设图 G 是连通图,否则考虑 G 的每个连通分支.

任取一个点 A 将其染色 1,然后根据以下规则对其他所有顶点 B 分别染色:如果存在一条 $A\to B$ 长为偶数的路径,则将 B 染为 1 色;否则,染为 2 色. 由于 G 中不存在奇环,故每个圈的长度为偶数,$A\to B$ 的路径具有相同的奇偶性,因此每一个点可以染上

一个确定的颜色,且相邻两点不同色.

因此G是一个二分图,1 色的点集和 2 色的点集内部没有边相连.

反过来,如果一个图是二分图,则不存在奇环.从点集A出发,到达的点必然是点集B,而要回到点集A必须再经过一条边,这样总共走过了偶数条边.

二分图是图论中的重要模型,有很多特殊的性质.

1. 二分图都是完美图

完美图,指染色数等于最大完全图.

染色数,指将图的每个顶点染色,使得任意两个相邻顶点不同色所需要的最小颜色数.

最大完全图,指图的最大子图,它的任意两个顶点都有边直接相连.

在任何图中,染色数不小于最大完全图大小,因为最大完全图中的任意两个顶点必须用不同的颜色区分.

二分图中由于不存在三角形,其最大完全图为线段K_2,而其染色数根据定义也为 2,因此二分图是完美图.

完美图有很多性质,例如图的染色问题,最大完全图问题,最大独立集问题都可以在多项式时间内解决.

一个图是完美图,当且仅当它的补图是完美图.

2. 最小点集覆盖等于最大匹配

点集覆盖,指图的顶点的一个子集,使得图中的每条边都至少有一个端点在这个子集中.

图的匹配,指图的边集的一个子集,使得任意两条边没有公共顶点.

最小点集覆盖等于最大匹配,被称为 König 定理,是二分图的重要性质.

证明:设 G 是一个二分图,M 是它的一个匹配.我们只需证明,或者 M 不是 G 的最大匹配,或者存在一个与 M 相等的点集覆盖.

首先检查是否所有边都在 M 中被匹配了.如果是,二分图的一部分形成了大小为|M|的点集覆盖,命题得证.

否则,将 G 的顶点按照如下规则分割成子集S_i,称为“级别”:

令S_0包含所有在 M 中未匹配的顶点.当S_{2j}被定义时,令S_{2j+1}为S_{2j}中的点通过不在 M 中的边所连接到的,且不在$S_0,S_1,\dots,S_{2j}$中的顶点组成的集合.这样,S_{2j+1}一定是 M 中一条边的端点,否则它就会在集合S_0中.对于每一条这样的边,如果另一个端点不在$S_0,S_1,\dots,S_{2j+1}$中,将这个端点放入集合S_{2j+2}.

如果在上述进程中的任何时刻,不存在与S_{2j}相邻的顶点,我们可以将一个单独的顶点放入S_{2j+1},继续定义S_{2j+2},重新启动这个进程.

对于 G 中的任意顶点 v,在集合S_i中可以找到一条从顶点 v 到一个在S_{i-1}中的顶点的路径,每次升高一级,结束在一个未匹配的顶点,或者一个只有一个顶点的级别.这称为交替路径,路径中的边交替的从匹配中进出.如果在同一奇数级别S_{2j+1}中的两个顶点u,v之间存在任何已匹配边uv,则这两条u,v的交替路径可以通过顶点u,v连接成一条交替路径.由于图的二分性,这条路径不存在任何重复顶点,所以这条路径必然开始,结束于一个未匹配顶点.

将交替路径中的匹配边从 M 中删去,换为未匹配路径中的边,将使得匹配更大.类似的,如果在同一个偶数级别S_{2j}中存在两个未匹配顶点u,v,我们可以在这两个顶点之间构造一条交替路径,从而增大匹配.这些都表明 M 不是最大匹配.

于是在偶数级别的子集中,不可能存在匹配边,从而每个在偶数级别中的匹配顶点都被它的匹配边连接到前一级别中的一个顶点.

因此,如果 M 是最大匹配,每条匹配边在奇数级别S_{2j+1}中都有唯一的端点,而每条未匹配边至少有一个端点在奇数级别中.

从而,奇数级别子集的并集构成了图的一个覆盖,且与M的大小相等.它必然是最小覆盖,因为没有更小的点集能够覆盖所有 M 中的边.综上,二分图的最大匹配与最小覆盖大小相等.

利用最大匹配最小覆盖定理,可以使用现有的匈牙利算法计算最大匹配,从而得到最小覆盖.

最小覆盖的常见应用是,国家中的两个城市之间可能有道路相连,为了把守住国家的每条道路,至少需要控制多少个城市?

最大匹配的常见应用是,公司有一些任务,每个员工可以完成其中一些特定的任务,但每个员工只能被分配一个任务,问他们至多能完成多少任务.

3. 最大独立集与最大匹配之和等于顶

点数.

独立集,指图的一个顶点子集,使得其中任意两个顶点不相邻.

这个定理的证明很显然,在图中将最大匹配的所有顶点删除,剩下的点必然两两互不相连(否则这两点间连一条边,与最大匹配矛盾),这就是最大独立集.

最大独立集常见的应用是,在一个游戏中,需要安放最多的枪手,但它们之间不能直接相邻,否则会互相攻击.

对于一般的图,最大独立集问题是 NP-完全问题,不能在多项式时间内解决.对于二分图,这个特殊的关系是很有用的.

4. 最小边集覆盖等于最大独立集

边集覆盖,指图的一个边子集,使得每个顶点至少是其中一条边的顶点.

这个定理也是显然的.从最小边集覆盖的每条边中选出一个顶点,这些顶点必然是互不相邻的(否则将这两点连一条边,取代原来的两条边,与最小边集覆盖矛盾),就是最大独立集.反过来,最大独立集的每个点连出一条边,这些边互不相交(否则两点相邻,与独立集矛盾),即为最小边集覆盖.(如果这些边没有覆盖所有顶点,则将这个顶点加入独立集,与最大性矛盾.)

最小边集覆盖,主要应用于控制一个国家中的所有城市,但控制的是道路.类似于最小点集覆盖,区别在于选择边,覆盖点还是选择点,覆盖边.有趣的是,最小边集覆盖与最小点集覆盖之和等于图的顶点数.

5. 最小路径覆盖

用尽量少的不相交简单路径覆盖有向无环图 G 的所有 n 个顶点.

建立一个二分图模型,将每个顶点拆成两个 i, i',如果原图中有边 $i \to j$,则在二分图中引入边 $i \to j'$,求出二分图的最大匹配 m,则最小路径覆盖就是 $n-m$.

由上面的定理可以看出,二分图的匹配在二分图算法中占据核心地位.

求最大匹配的常用算法是**匈牙利算法**.

匈牙利算法的基本思路与上面证明“最小点集覆盖等于最大匹配”的思路相同,都是寻找“增广路径”,逐步添加匹配边.

若 P 是图 G 中一条连接两个未匹配顶点的路径,且属于 M 的边和不属于 M 的边在路径上交替出现,则称 P 是 M 的一条增广路径.

由增广路径的定义,P 的路径长度必定是奇数,且第一条边与最后一条边都不属于 M.路径 P 经过取反操作(在 M 中的变成不在 M 中的,不在 M 中的变成在 M 中的),可以得到一个更大的匹配.因此 M 为 G 的最大匹配当且仅当不存在增广路径.

具体程序实现时,对于二分图左边的每个顶点,分别从该点出发寻找增广路径(交替路径),如果找到,则将其取反.

这里用到了一个重要的定理:如果从二分图的某个点 A 出发没有找到增广路径,则不论从其他点出发找到多少条增广路径而改变现有匹配,从点 A 出发都不会找到增广路径.因此我们只需要将每个顶点各枚举一次,没有必要“走回头路”.

若二分图的左侧共有 n 个点,寻找每条增广路径至多将所有 m 条边遍历一遍,故时间复杂度不超过 $O(nm)$.

如果所有点都在匹配边上,则这个匹配是**完美匹配**.完美匹配显然是最大匹配.

Hall 定理 设 G 是二分图 (X, Y, E),其中 $X = \{x_1, ..., x_n\}, Y = \{y_1, ..., y_m\}, n \le m.$ 则 G 中含有 n 匹配的充要条件是,对任何整数 k 和 X 中任何 k 个点,它们在 Y 中的邻点总数不小于 k.

证明:必要性:若 G 中含有 n 匹配,则 X 中的每个点恰好对应 Y 中的一个点,任意 k 个点通过匹配相连的的邻点总数恰好为 k.

充分性:使用数学归纳法.

若对所有的 k,对于 X 中的 k 个点,它们在 Y 中的邻点总数都不小于 $k+1$,则取 G 的一条边 $x_n y_m$,去掉点 x_n, y_m 及与它们相连的边,此时每个 X 中的点至多去掉了一条边 $x_i y_m$,仍然满足题设.由归纳假设,新图中存在 $n-1$ 匹配,连同去掉的边 $x_n y_m$,得到 n 匹配.

若存在 k,X 中存在 k 个点,它们在 Y 中邻点的个数恰好为 k.不妨设 $x_1, ..., x_k$ 的 k 个邻点为 $y_1, ..., y_k$.若存在 $x_1, ..., x_k$ 中的邻点不在 $y_1, ..., y_k$ 中,则 $x_1, ..., x_k$ 不止有 k 个邻点,矛盾.故 $x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k$ 满足题目条件,由归纳假设,存在 k 匹配.

在剩下的 $n-k$ 个 X 中的顶点中,若存在 t 个 X 中的点在 $y_{k+1}, ..., y_m$ 中的邻点数小于 t,则这 t 个点与 $x_1, ..., x_k$ 共 $t+k$ 个点在 Y 中的邻点数小于 $t+k$,矛盾.故 $x_{k+1}, ..., x_n, y_{k+1}, ..., y_m$ 满足题设,由归纳假设,存在 $n-k$ 匹配.

将上述两部分的匹配合起来,得到 n 匹配. 由归纳法知命题成立.

Hall 定理可用于证明完美匹配的存在性. 例如:有 n 个男士和 n 名女士参加舞会,每个男士恰好认识 t 名女士,每个女士恰好认识 t 名男士. 求证:可以适当安排 n 对舞伴,使每一对舞伴互相认识.

定理 如果一个二分图左右两侧各有 n 个顶点,每个顶点的度不小于 $n/2$,则这个二分图一定存在一个完全匹配.

证明 由于二分图的最大匹配数等于最小点覆盖集,而一个图的最小覆盖与最大独立集之和等于顶点数 $|V|=2n$. 因此只需证,二分图的最大独立集不超过 n.

若在左边选的顶点数不超过 $n/2$,由于左侧任一个点连接右面的 $n/2$ 个顶点,右侧最多选 $n/2$ 个顶点;若在左边选的顶点数大于 $n/2$,则右边的顶点一个都不能选. 总之,最大点独立集不可能超过 n,但取同一边的所有点,n 是可以达到的,故最小覆盖也就是 n,即二分图存在完全匹配.

在二分图的边上赋予不同的权值,**二分图最优匹配**,指一种完美匹配,使得所有匹配边的权和最大.

定理 设 M 是一个带权完全二分图 G 的一个完美匹配,给每个顶点一个可行标记 x_i, y_i,如果对 G 中所有的边 (i, j),都有 $x_i + y_i \ge w(i, j)$ 成立($w(i, j)$ 表示边的权),且对 M 中所有的边 (i, j),都有 $x_i + y_i = w(i, j)$ 成立,则 M 是图 G 的一个最优匹配.

根据以上定理,我们便有了 **KM 算法**:

(1) 初始化可行标记的值.

(2) 用匈牙利算法寻找完美匹配

(3) 若未找到完美匹配,则修改可行标记的值.

(4) 重复(2)(3)直至找到完美匹配.

读者可能会问,如何修改可行标记的值?如果任意指定,而总是不能找到完美匹配怎么办?KM 算法的核心就是修改可行标记的策略,使得最终一定可以找到完美匹配.

首先任意设置可行标记,然后寻找增广路,并扩充匹配边集. 如果没有找到,则考虑左右两侧的已匹配点集 L, R,考察所有一端在 L 中,一端不在 R 中的边,取 $\Delta = \min\{x_i + y_j - w(i, j), i \in L, j \notin R\}$.

我们将所有 L 中的 x_i 减少 Δ 后,显然会有一条这样的边进入相等子图,进而可以继续扩展匹配边集. 为保证原来在匹配边集中的边不退出相等子图,将所有 R 中的点的可行标记增加 Δ.

下面证明相等子图只可能扩大,不会缩小. 即原来属于相等子图的边,不会退出.

对于两端都在交错路径中的边 (i, j),$x_i + y_j$ 的值没有变化. 故原来属于相等子图的边,现在仍然属于相等子图.

对于两端都不在交错路径中的边 (i, j),x_i 和 y_j 都没有变化. 也就是说,它原来属于(或不属于)相等子图,现在仍属于(或不属于)相等子图.

对于 X 端不在交错路径中,Y 端在交错路径中的边 (i, j),它的 $x_i + y_j$ 的值有所增大. 它原来不属于相等子图,现在仍不属于相等子图.

对于 X 端在交错路径中,Y 端不在交错路径中的边 (i, j),它的 $x_i + y_j$ 的值有所减小. 也就说,它原来不属于相等子图,现在可能进入了相等子图,因而相等子图可能得到了扩大.

随后,匹配子图继续扩展,如果新加入的 R 顶点未被覆盖,则找到了增广路. 否则,将新加入的 L 顶点加入匹配子图尝试增广.

复杂度分析:设图有 n 个顶点,m 条边. 由于在不扩大匹配的情况下,每次匹配子图调整后至少增加一个元素,因此最多运行 n 次就可以找到一条增广路,故最多执行 n^2 次修改可行标记的操作;而每次修改需要扫描所有边,这样修改可行标记的复杂度为 $O(m)$. 因此总复杂度为 $O(n^2 m)$,事实上远远达不到这个上限.

我们还可以对 KM 算法进行优化. 对于不在 R 中的每个元素 y_j,定义松弛变量

$s(j) = \min\{x_i + y_j - w(i, j), i \in L, j \notin R\}$

显然每次 $\Delta = \min\{s(j), j \notin R\}$. 每次增广后,用 $O(n^2)$ 计算所有点的初始 $s(j)$. 在修改标记后,把已覆盖的 R 顶点对应的 L 顶点加入匹配边集时,需要修改松弛变量. 由于扩充匹配边集时,每条边的标记增量相同,修改每个松弛变量的时间为常数,故修改所有松弛变量的时间为 $O(n)$. 每次增广后至多修改 n 次标记,n 次增广的总时间复杂度降为 $O(n^3)$.

由于二分图的种种特殊性质，数学和信息学试题往往将其视为图论中的重点.

例 1 平面上 n 条直线将平面划分为若干个区域，求证：可以将区域 2-染色，使有公共边界的任何两个区域异色.

证明：我们注意到“2-染色”“相邻两区域异色”，就发现这一定是一个二分图.

将图中的区域抽象成顶点，将相邻的两个区域间连一条边，则只需证明图中不存在奇环.

任取图中的一个环，则必定是穿过了若干个区域又回到原来的区域. 对于每条直线，被一条环路分割，必定相交偶数次，故穿越分界线次数为偶数，即所有的环均为偶环.

至于染色方法，只需从一点出发，将所经过的点交替染上不同的颜色，遍历整个图，即可完成.

由本题可见，利用二分图模型，可以大大简化解题过程，降低思维难度.

例 2 （2002 克罗地亚）岛上住着 n 个本地人，他们中每两个人要么是朋友，要么是敌人. 一天，首领要求每位居民（包括首领自己）按以下原则自己做一条石头项链：每两个朋友间，他们的项链上至少有一块石头相同；每两个敌人间，他们的项链上没有相同的石头（一条项链上可以无石头）. 求证：要完成首领的命令，需要 $[\frac{n^2}{4}]$ 种不同的石头；而石头种数少于 $[\frac{n^2}{4}]$ 时，此命令可能无法实现.

证明：本题又是一道明显的二分图问题，因为题目描述中有“朋友间相同”（有边相连）“敌人间不同”（无边相连）.

不难发现，当二分图的两个集合的元素个数越接近，两者之间两两相连所需要的边数越少. （和固定，乘积最小）因此当 $n=2k+1$ 时，一组 k 人，一组 $k+1$ 人，同组的任意两人都是敌人，不同组的任意两人都是朋友. 此时，共需 $k(k+1)$ 块石头. 当 $n=2k$ 时，分成相等的两组，共需 k^2 块石头，与题目中的 $[\frac{n^2}{4}]$ 相符.

下面用数学归纳法证明，当 $S=[\frac{n^2}{4}]$ 时，可以构造这样的项链. 基本的情形显然.

假定 k 个人时结论成立，下证 $k+2$ 个人也成立. 若 $k+2$ 个人中没有朋友，则不需要石头. 否则，设 A,B 是朋友，由归纳假设，另外 k 个人之间至多需要 $[\frac{k^2}{4}]$ 块石头. 考察这 k 个人中的任意一个 P，(P,A,B) 构成一个三人组，则此组只需增加一块石头.

事实上，若 $(A,P),(B,P)$ 都是敌人，则无需增加新石头. 若 $(A,P),(B,P)$ 一对为朋友，一对是敌人，则将互为朋友的一对各增加一块石头. 若 $(A,P),(B,P)$ 都是朋友，则每人增加一块石头. 于是，k 个人至多增加 k 块石头. 又因为 A,B 之间至多需要一块石头，故 $k+2$ 个人至多需要

$$[\frac{k^2}{4}]+k+1=[\frac{(k+2)^2}{4}]$$ 块石头.

本题由于是证明题，难度并不很大. 如果作为求值题，要猜想出 $[\frac{n^2}{4}]$ 这个答案，就必须有二分图的思想.

通过此题，也可以了解证明二分图最值的重要方法：数学归纳法，考虑新加的点，并分奇偶讨论；或者一次添加两个点.

例 3 （2003 中国国家队培训）设 n 为给定的正整数 $(n\geq 5)$，求正整数 m 的最小值，使得任意一个有 m 条边的 n 阶简单图 G 中存在两个恰有一个公共顶点的三角形.

解：$m=[\frac{n^2}{4}]+2$.

首先证明，$m=[\frac{n^2}{4}]+1$ 时，存在图 G，在 G 中没有两个恰有一个公共点的三角形.

考虑二分图：顶点集为 M_1, M_2，在 M_1 中有 $[\frac{n+1}{2}]$ 个顶点，M_2 中有 $[\frac{n}{2}]$ 个顶点，将 M_1 中每个点与 M_2 中每个点连边，且 M_1 中某两个点连边，其余顶点之间不连边，则此图中有 $[\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}]+1=[\frac{n^2}{4}]+1$ 条边，但此图中没有两个三角形恰有一个公共顶点.

再证明，$m=[\frac{n^2}{4}]+2$. 任意一个有 m 条边的 n 阶简单图 G_n 中，存在两个恰有一个公共顶点的三角形.

当 $n=5$ 时，G_5 的边数为 8，即完全图

K_5 去掉两条边, 由于 K_5 中每个顶点的度为 4, 故去掉两条边后, 仍有一个顶点的度为 4, 不妨设 $d(a)=4.$ 于是 2 条边是由剩下的 K_4 中去掉的, 这时剩下的 4 个点 b,c,d,e 形成的三组对边中, 必有一组对边(不妨设为 bc,de)同时存在, 所以 a,b,c,d,e 构成满足条件的 5 个点.

设命题对 $n-1(n\ge 6)$ 成立, 考虑 n 的情形.

情形一: 若 G_n 中有一个点的度 $\le[\frac{n}{2}]$, 则删去此点及其引出的边后, 剩下 $n-1$ 个点之间所引的边数不小于

$$[\frac{n^2}{4}]+2-[\frac{n}{2}]=2+[\frac{n}{2}]([\frac{n+1}{2}]-1)$$

$$=2+[\frac{n}{2}][\frac{n-1}{2}]=2+[\frac{(n-1)^2}{4}].$$

由归纳假设知命题成立.

情形二: 若 G_n 中每个点的度均 $\ge[\frac{n}{2}]+1$, 则当 $n=2k$ 时,

$$e\ge k(k+1)>k^2+2=[\frac{n^2}{4}]+2,$$

而当 $n=2k+1$ 时,

$$e\ge\frac{1}{2}(2k+1)(k+1)$$

$$=k(k+1)+\frac{k+1}{2}\ge[\frac{n^2}{4}]+2.$$

其中等号仅当 $k=3,n=7$ 是取到.

如果 $e>[\frac{n^2}{4}]+2$, 则从 G_n 中去掉一条边, 重复上述讨论, 除 $n=7$ 的情形, 其余情况必可转化为情形一.

所以, 只需讨论 $n=7$, 每个点的度数均为 4 的情形.

在这种情形中, 考虑与 a 相邻的 4 个顶点 b,c,d,e. 在 b,c,d,e 组成的子图中, 每个点的度不小于 1. 不妨设 b,c 之间连有边, 这时若 d,e 之间连有边, 则命题获证.

只需考虑 d,e 不连边的情形. 若 d,e 分别与 b,c 或 c,b 连有边, 命题也获证. 从而 d,e 同时与 b 或 c 相邻, 不妨设为 b, 而 c,d,e 之间两两不连边. 考虑另外两点 f,g 由于 c,d,e 的度都是 4, 故 c,d,e 都与点 f,g 同时相邻, 而 f,g 的度也都为 4, 故 f,g 相邻(因为 f,g 与 a,b 都不相邻).

这样我们得到下面的图, 此时 ea,eb,eg,ab,fg 满足题中的要求.

综上可知, $m=[\frac{n^2}{4}]+2.$

本题以及上面的几题, 构造的都是完全二分图, 即二分图的两个点集之间两两有边相连. 本题中, 事实上是在完全二分图上添加一条边, 形成一组共边三角形, 此时只要再添加一条边, 便会形成共点三角形.

为什么二分图在图论的最值问题中经常出现呢?原因是很多问题都可以归结为 2-染色问题(例如连边, 不连边;朋友, 敌人;白色, 黑色;认识, 不认识等对立状态), 而二分图, 尤其是完全二分图, 正是满足一定条件的 2-染色图的边数取到极值的状态, 因此 $[\frac{n^2}{4}]$ 在图论中是常见的.

例 4 (2005 中国国家队培训)一个图的每条边都被染为 4 种颜色之一, 使得每一条由三条边组成的路径上的第一条和第三条边的颜色不同(路径的起点和终点可以重合). 证明可以用 4 种颜色为这个图的所有顶点染色, 使得任何两个有边相连的顶点的颜色都不相同.

证明: 考察由所有顶点和那些被染为 1 色和 2 色的边所构成的图 G.

下面用反证法证明, 图 G 是一个二分图.

假设图中有奇环, 考察这个环上边的颜色. 显然这个环上必有两条相邻边同色, 不妨设两条相邻边都是 1 色, 从这两条边出发, 必是两条 2 色边, 然后是两条 1 色边, 以此类推. 这将导致环长为偶数, 矛盾.

将图分为若干连通分支 $G_i(1\le i\le k)$, 由于 G_i 中没有奇环, 故 G_i 中任意两个顶点间路径长度的奇偶性相同. 任取 G_i 中一个顶点 v_i, 将与 v_i 之间的路径长度为偶数的顶点全体记为 v_i'', 将与 v_i 之间的路径长度为奇数的顶点全体记为 v_i', 则 v_i',v_i'' 的内部都没有图 G 中的边. 由此可知, 图 G 是一个二分图, 即原图的所有顶点可以分为两组 A_1,A_2, 在 A_1,A_2 内部都没有 1 色和 2 色的边. 同理, 原图的所有顶点也可以分为两组 B_1,B_2, 在 B_1,B_2 内部没有 3 色和 4 色的边.

从而在 $A_1\cap B_1,A_1\cap B_2,A_2\cap B_1,A_2\cap B_2$ 这四组

顶点的内部没有任何边.于是将这四组顶点各染一种颜色即满足要求.

评注:本题中的要求"任何两个相邻顶点不同色"立即暴露了"二分图"的本质.

上述楷体部分是由偶环到二分图的证明,不同于本文开头所述,可以借鉴.我们还得到二分图的另一个充要条件:每一条由三条边组成的路径上的第一条和第三条边的颜色不同.

例5(IMO2004预选题,国外数学竞赛66)对一个有限图如下操作:选择任意一个长为4的回路,任意选择回路中的一条边,并将其从图中删掉.对于固定的整数$n\geq 4$,若将n个顶点的完全图重复进行如上的操作,求所得图边数的最小值.

解:最小值为n.

首先证明,进行操作能得到的图,必然是连通图.完全图显然是连通图.在长为4的回路中删去一条边,剩下三条边,仍然联通四个顶点,故仍然是连通图.

其次证明,进行操作能得到的图,必然不是二分图.完全图显然不是二分图.考虑原命题的逆否命题,证明从一个二分图出发,将长为3的路径的两个端点连接,形成长为4的回路,仍然是二分图.

由于二分图中仅在两个集合之间有边相连,故长为3的路径必从一个集合A出发,到达另一个集合B,回到A,再到达B.连接路径的端点,所连的边仍然是AB集合之间的,图仍然是二分图.因此由二分图不可能扩充产生非二分图.

由于所得图是连通图,故至少有$n-1$条边.若恰有$n-1$条边,则形成一棵树,树显然是二分图,矛盾.故所得图至少有n条边.

下面用归纳法证明,可以适当操作,使得完全图最终剩下n条边.

设当前待操作的顶点为A_n.对边$A_3A_n, A_4A_n, \ldots, A_{n-1}A_n$,由于$K_n$完全图,可从四边形$A_nA_1A_2A_i$中删除此边.对边$A_2A_n$,可从四边形$A_nA_1A_3A_2$中删除此边.如此操作后,$A_n$仅有一条边$A_1A_n$与$K_{n-1}$相连.

运用数学归纳法继续操作,直至$n=3$,此时图中剩下$A_1A_i(i=2,3\ldots n)$和A_2A_3,恰有n条边.综上,所得图边数最小为n.

例6(2005日本,国外数学竞赛83)一名公司经理有n名员工和n项任务.需要分配每位雇员一项任务.对于雇员和任务的每一个配对,给定两个称为"热情"和"能力"的实数.

倘若雇员A对任务v的热情高于任务u,同时能力高于雇员B,而你把任务u交给雇员A且把任务v交给雇员B,则A会不满意.

另外,倘若存在另一种分配方案,使得每个任务的接受者的能力都高于你所分配的,那么总经理将会生气.

证明:存在一种分配方案,使得所有雇员满意且总经理不会生气.

证明:只需运行以下程序,直至确定分配方案.

选择一项尚无人接受的任务v,询问在未被问过是否愿意接受v的雇员中,最有能力完成任务v的雇员A,是否愿意接受v,分以下三种情况:

(1)若A尚未接受其他任务,则立即接受任务v.

(2)若A已经接受其他任务u,则比较他对u,v的热情,并选择热情较高的一个,另一个变为或继续是无人接受的任务.

这个过程将在至多n^2步后结束,因为每位雇员至多被询问每个任务一次.

首先证明每位雇员是满意的.对每一项任务v,由于按能力从高到低依次询问每位雇员,因此对于每位雇员A,除非他拒绝v去做更有热情的任务u,没有被比A能力差的B剥夺做v的权力.

其次证明总经理不会生气.按照上述规则,最后接受任务的雇员A从未拒绝过任何一项任务.(否则假设他拒绝了某项任务,则必然接受了另一项任务,而此后还要有人接受那项剩下的任务,与最后矛盾)现在任取另一种分配方案,其中A接受了任务v.由于按照能力依次询问是否接受v,而A从未拒绝v,故知已经把v分配给了A或比他能力更强的人.

综上,以上分配方案符合要求.

背景 本问题的背景是著名的"稳定婚姻问题".有n位男士和n位女士,每个人都对每个异性有一个喜爱程度.如果男士u和女士v不是配偶,但喜欢对方的程度都大于喜欢各自当前配偶的程度,则称他们为一个不稳定对.稳定婚姻问题是希望找出一个不包含不稳定对的婚姻方案.

算法与本题中的相同,称为求婚-拒绝算法,这里的男士是任务,而女士是雇员.

随着算法的执行,每位女士的配偶越来越好,而每位男士的配偶越来越差.因此假设男士u和女士v形成不稳定对,u一定向v求过婚,但被拒绝.这说明v当时的配偶比u

更好，因此算法结束后的配偶一定仍比 u 好，与不稳定对的定义矛盾. 考虑最后一个被抛弃的男士和抛弃这位男士的女士，即可得知算法一定结束.

有趣的是，看起来是女士更有选择权，但实际上最后的结果，却是男士最优的. 在稳定婚姻的前提下，对于所有男士来说，不会有比这更好的结果了；而对于所有女士来说，不会有比这更糟的结果了. 这也是使雇员因得到选择权而满意而总经理在背后偷着乐的原因.

例 7（2005 罗马尼亚，国外数学竞赛 131）给定一个多面体，假定只有两个顶点引出奇数条边，且这两个点是相邻的. 任给一个整数 $n \ge 3$，证明：该多面体的某个面的边数不能被 n 整除.

证明：我们可以把多面体看成画在球面上的一幅地图，多面体的每个面对应于地图上的国家. 为方便起见，把顶点分为偶顶点和奇顶点，依据与该点相连的边是偶数条还是奇数条而确定. 这样，地图上只有两个奇顶点，记为 x, y.

假定每个国家的边数都是 n 的倍数，设 an 与 bn 分别表示沿边 xy 相邻的两个国家的边数. 将边 xy 从图中删除，记新的地图为 M，则 M 的全部顶点都是偶顶点.

如果 M 是一个二分图，即可以对其国家黑白二染色，使得相邻的国家不同色. 则所有具有相同颜色的国家边数之和等于地图 M 的总边数 e. 不妨设通过删除边 xy 得到的国家为黑色，这个国家有 $(a+b)n-2$ 条边，而剩余的黑色国家的边数都能被 n 整除，故 $e \equiv -2 \pmod n$.

另一方面，每个白色国家的边数都是 n 的倍数，于是 e 也是 n 的倍数，矛盾.

下面证明，M 是一个二分图.

将任何两个相邻国家的首都用一条非自交的弧联系起来，该弧与它们的公共边相交. 各条新添加的弧总可以画的不相交，按这种方式可以得到原地图 M 的一个对偶地图 M'，M 中的首都是 M' 中的顶点，刚才所画的弧构成了 M' 中的边，而 M 中的每个顶点 v 恰包含于 M' 的一个国家 C 中.

具体地说，M' 中国家 C 的顶点是 M 中交于顶点 v 的国家的首都，v 实际上可以看成 C 的首都. C 的边界是由 M 中与边交叉的弧构成的，这样 M 中的顶点，边和国家就分别与 M' 中的国家，边和顶点建立了一一对应的关系. 由于 M 中每个顶点是偶顶点，于是 M' 中每个国家也具有偶数条边.

只需证：M' 是二分图.

下面是对二分图染色的过程. 首先固定顶点 a，并赋予它一种颜色.

其他顶点 b 可以达到，是指存在一条由 a 出发，由有限条边组成的路径. 我们称这个边数为路径的长度.

在所有由 a 到 b 的路径中，考虑最短的路径，其长度 $m = m(b)$. 当 m 是偶数时，给 b 染上和 a 相同的颜色. 如果 b 是奇数，则染另外的颜色. 这样，b 的颜色就确定了.

为了证明没有相邻的顶点被染成相同的颜色（二分图判定），可以考虑两个相邻顶点 b, c 与两条路径：

$\beta = ax_1 \ldots x_p b, \gamma = ay_1 \ldots y_q c$，这两条路径都具有最小长度. 设 $x_0 = a = y_0, x_{p+1} = b$，$x_{q+1} = c$.

由于最小性，x_i, x_j 互不相同. 若对某一组下标 i, j，$x_i = y_j$，必有 $i = j$. 令

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}\},$$

$$Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_q, y_{q+1}\},$$

$$r = \max\{i \mid x_i \in Y\} = \max\{j \mid y_j \in X\}.$$

则环路

$w = x_r x_{r+1} \ldots x_p x_{p+1} y_{q+1} y_q \ldots y_{r+1} y_r$ 画出了一个区域，该区域由若干个国家构成（如 $C_1, C_2, \ldots, C_s$）.

应用约当曲线定理，设 t_k 是 C_k 的边数，由于每个 t_k 都是偶数，于是 $t = t_1 + \ldots + t_k$ 也是偶数. 又由于每个内部的边在 t 中被重复计数两次，于是边界 w 也是由偶数条边组成的，但这个数是

$$((p+1)-r)+1+((q+1)-r)$$
$$= p+q-2r+3.$$

于是 p, q 奇偶性相反，即相邻顶点不同色，二分图得证.

评注：满足条件的多面体确实存在. 事实上，任给整数 $n \ge 3$，存在一个多面体恰好有一个 n 边形的面.

利用欧拉公式，还可以证明：具有这种性质的多面体，至少有一个三角形的面.

于是，问题就相当于证明某个面的边数不能被 3 整除. 相应的论证本质上是相同的.

条件“两个奇顶点相邻”对于结论的成立是关键性的. 为看出这一点，取任意奇数 m $(m \ge 3)$，然后将两个以正 m 边形为底面

的棱锥,底面对底面接在一起,则所得的多面体具有 m 个偶顶点(度数为 4),且恰有两个奇顶点(度数为 m),但这两个点不相邻.这个多面体的每个面都是三角形,于是每个面的边数都能被 3 整除.

在本题的解决过程中,构造并证明二分图是核心步骤,这样的思路也是利用二分图证明的经典方法,值得推敲.

约当曲线定理 任一简单闭曲线将平面唯一地分为 $C,I(C),E(C)$ 三个点集,它们具有如下性质:

(1)彼此不交.

(2) $I(C)$ 与 $E(C)$ 一个为有界区域(称为 C 的内部),另一个为无界区域(称为 C 的外部).

(3)若简单折线 P 的一个端点属于 $I(C)$,另一个端点属于 $E(C)$,则 P 与 C 必有交点.

对于简单闭曲线的方向,通常我们是这样来规定的:当观察者沿 C 绕行一周时,C 的内部始终在 C 的左方(或右方),即逆时针(或顺时针)方向,称为 C 的正方向(或逆方向).

上述定理看起来很显然,但证明是困难的,也是拓扑学中的重要内容.

例 8 (1993 中国国家队选拔)如果最少要用 n 种颜色给图中的顶点染色,才能使相邻的点不同色,则称之为 n 色图.求证:对任何自然数 n,存在不含三角形的 n 色图.

证明:用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

假设 $n=k$ 时成立,设构造的 k 色图为 G,有 V 个顶点.将 k 色图复制 k 次,形成 $G_1,G_2,...,G_k$.

从 $G_1,...,G_k$ 中各取一个点 P_i,共有 V^k 种取法,每个 k 点组 $(P_1,...,P_k)$ 对应一个新点 Q,连接 $P_1Q,...,P_kQ$.

首先证明,新图中不存在三角形.由归纳假设,$G_1,...,G_k$ 中不存在三角形;而新增的 Q_i 之间两两不连边,同一个 Q_i 所连的 k 个顶点也是互不相连的,因此满足题意.

其次证明,新图是 $k+1$ 色图.一方面,将新增加的 Q_i 全部染 $k+1$ 色,原图 G_i 由归纳假设可以 k 染色,故新图可以用 $k+1$ 种颜色染色.

另一方面,新图不可以用 k 种颜色染色.假设实现了 k 染色,在 G_i 中取出染有 i 色的点 P_i,则 k 点组 $(P_1,...,P_k)$ 已经用了 k 种颜色,而由 Q 的构造知存在 Q_i 与 $P_1,...,P_k$ 都相邻,此时 Q 无论用 $1,...,k$ 的任何一种颜色都会发生重复,矛盾.

由归纳法知,命题成立.

评析:《组合构造》中此题解法较繁琐,称当年参赛的学生中只有一人做出,这是不应该的.本题虽然没有直接用到二分图,但构造的新点集 Q 应用了二分图的思想“同一个集合不连边,不同集合元素两两连边”的构造策略.将原点集复制 n 次的思想来源于将每个原点集视作一个点,这些“复制品”之间两两不相连.笔者做出这个解答时,也是先考虑直接构造二分图,失败;但题目分明是有关“染色数”,又观察到“不含三角形”的重要条件,便想到利用数学归纳法,构造“类二分图”.

由此可见,在上述若干数学竞赛问题中,应用二分图,思路自然,方法固定,表达清晰.国家队的试题,就一定那么难吗?难题都有深刻的数学模型作为背景,掌握一定方法,就可以“化难题为水题,化腐朽为神奇”.

例 9 双栈排序(NOIP2008)

有两个队列和两个栈,分别命名为队列 1(q1),队列 2(q2),栈 1(s1)和栈 2(s2).最初的时候,q2,s1 和 s2 都为空,而 q1 中有 n 个数(n<=1000),为 1~n 的某个排列.

现在支持如下四种操作:

a 操作,将 q1 的首元素提取出并加入 s1 的栈顶.

b 操作,将 s1 的栈顶元素弹出并加入 q1 的队列尾.

c 操作,将 q1 的首元素提取出并加入 s2 的栈顶.

d 操作,将 s2 的栈顶元素弹出并加入 q1 的队列尾.

请判断,是否可以经过一系列操作之后,使得 q2 中依次存储着 1,2,3,…,n.如果可以,求出字典序最小的一个操作序列.

贪心算法:30 分

1、读入序列

2、若能进入 S1 栈,则执行 a 操作,进入 S1 栈;重复执行 b 操作,将 S1 栈中当前元素弹出,直到不可行为止.

3、若能进入 S2 栈(c),并将 S2 中符合要求的元素弹出(d),直到不可行.

4、若两栈均无法进入,失败退出

5、输出操作序列

判断是否能进栈:

若当前元素小于栈顶元素,则进栈,栈元素个数自增；否则不能进栈.因为栈中必须保持降序,这样才能保证依次输出时升序

判断是否能出栈:

用全局变量表示当前取出的最大元素.若栈内元素个数不为零,且当前栈顶元素等于最大元素+1(因为元素是 1-n 依次取出的),则取出该元素,最大元素自增,栈元素个数自减.

当然,还有错误做法却能得满分的.本题的正确算法是**二分图**.

注意到并没有说基于二分图匹配,因为这个算法和二分图匹配无关.这个算法只是用到了给一个图着色成二分图.

第一步需要解决的问题是,**判断是否有解**.

考虑对于任意两个数 q1[i]和 q1[j]来说,它们不能压入同一个栈中的充要条件是什么(注意没有必要使它们同时存在于同一个栈中,只是压入了同一个栈).实际上,这个条件 p 是:存在一个 k,使得 i<j<k 且 q1[k]<q1[i]<q1[j].

首先证明**充分性**,即如果满足条件 p,那么这两个数一定不能压入同一个栈.这个结论很显然,使用反证法可证.

假设这两个数压入了同一个栈,那么在压入 q1[k]的时候栈内情况如下:

…q1[i]…q1[j]…

因为 q1[k]比 q1[i]和 q1[j]都小,所以很显然,当 q1[k]没有被弹出的时候,另外两个数也都不能被弹出(否则q2 中的数字顺序就不是 1,2,3,…,n 了).

而之后,无论其它的数字在什么时候被弹出,q1[j]总是会在 q1[i]之前弹出.而 q1[j]>q1[i],这显然是不正确的.

接下来证明**必要性**.也就是,如果两个数不可以压入同一个栈,那么它们一定满足条件 p.这里我们来证明它的逆否命题,也就是"如果不满足条件 p,那么这两个数一定可以压入同一个栈."

不满足条件 p 有两种情况:一种是对于任意 i<j<k 且 q1[i]<q1[j],q1[k]>q1[i];另一种是对于任意 i<j,q1[i]>q1[j].

第一种情况下,很显然,在 q1[k]被压入栈的时候,q1[i]已经被弹出栈.那么,q1[k]不会对 q1[j]产生任何影响(这里可能有点乱,因为看起来,当 q1[j]<q1[k]的时候,是会有影响的,但实际上,这还需要另一个数 r,满足 j<k<r 且 q1[r]<q1[j]<q1[k],也就是证明充分性的时候所说的情况…而事实上我们现在并不考虑这个 r,所以说 q1[k]对 q1[j]没有影响).

第二种情况下,我们可以发现这其实就是一个降序序列,所以所有数字都可以压入同一个栈.

这样,原命题的逆否命题得证,所以原命题得证.

此时,条件 p 为 q1[i]和 q1[j]不能压入同一个栈的充要条件也得证.

这样,我们对所有的数对(i,j)满足 1<=i<j<=n,检查是否存在 i<j<k 满足 p1[k]<p1[i]<p1[j].如果存在,那么在点 i 和点 j 之间连一条无向边,表示 p1[i]和 p1[j]不能压入同一个栈.此时想到了什么?那就是二分图.

二分图的两部分看作两个栈,因为二分图的同一部分内不会出现任何连边,也就相当于不能压入同一个栈的所有结点都分到了两个栈中.

此时我们只考虑检查是否有解,所以只要 O(n)检查出这个图是不是二分图,就可以得知是否有解.

此时,检查有解的问题已经解决.接下来的问题是,如何**找到字典序最小的解**.

实际上,可以发现,如果把二分图染成 1 和 2 两种颜色,那么结点染色为 1 对应当前结点被压入 s1,为 2 对应被压入 s2.为了字典序尽量小,我们希望让编号小的结点优先压入 s1.

又发现二分图的不同连通分量之间的染色是互不影响的,所以可以每次选取一个未染色的编号最小的结点,将它染色为 1 并从它开始 DFS 染色,直到所有结点都被染色为止.这样,我们就得到了每个结点应该压入哪个栈中.接下来要做的,只是模拟之后的输出序列.

还有一点小问题,就是如果对于数对(i,j),都去枚举检查是否存在 k 使得 p1[k]<p1[i]<p1[j]的话,那么复杂度就升到了 O(n^3).解决方法就是,首先预处理出数组 b,b[i]表示从 p1[i]到 p1[n]中的最小值.接下来,只需要枚举所有数对(i,j),检查 b[j+1]是否小于 p1[i]且 p1[i]是否小于 p1[j]就可以了.

例 10 丘比特的烦恼(CTSC2000)

(这道题的文采很好,因此全题摘录)

随着社会的不断发展,人与人之间的感情越来越功利化.最近,爱神丘比特发现,爱情也已不再是完全纯洁的了.这使得丘比特

很是苦恼,他越来越难找到合适的男女,并向他们射去丘比特之箭.于是丘比特千里迢迢远赴中国,找到了掌管东方人爱情的神——月下老人,向他求教.

月下老人告诉丘比特,纯洁的爱情并不是不存在,而是他没有找到.在东方,人们讲究的是缘分.月下老人只要做一男一女两个泥人,在他们之间连上一条红线,那么它们所代表的人就会相爱——无论他们身处何地.而丘比特的爱情之箭只能射中两个距离相当近的人,选择的范围自然就小了很多,不能找到真正的有缘人.

丘比特听了月下老人的解释,茅塞顿开,回去之后用了人间的最新科技改造了自己的弓箭,使得丘比特之箭的射程大大增加.这样,射中有缘人的机会也增加了不少.

情人节(Valentine's day)的午夜零时,丘比特开始了自己的工作.他选择了一组数目相等的男女,感应到他们互相之间的缘分大小,并依此射出了神箭,使他们产生爱意.他希望能选择最好的方法,使被他选择的每一个人被射中一次,且每一对被射中的人之间的缘分的和最大.

当然,无论丘比特怎么改造自己的弓箭,总还是存在缺陷的.首先,弓箭的射程尽管增大了,但毕竟还是有限的,不能像月下老人那样,做到"千里姻缘一线牵".其次,无论怎么改造,箭的轨迹终归只能是一条直线,也就是说,如果两个人之间的连线段上有别人,那么莫不可向他们射出丘比特之箭,否则,按月下老人的话,就是"乱点鸳鸯谱"了.

作为一个凡人,你的任务是运用先进的计算机为丘比特找到最佳的方案.

输入文件格式

输入文件第一行为正整数 k,表示丘比特之箭的射程,第二行为正整数 n(n<30),随后有 2n 行,表示丘比特选中的人的信息,其中前 n 行为男子,后 n 行为女子.每个人的信息由两部分组成:他的姓名和他的位置.姓名是长度小于 20 且仅包含字母的字符串,忽略大小写的区别,位置是由一对整数表示的坐标,它们之间用空格分隔.格式为 Name x y.输入文件剩下的部分描述了这些人的缘分.每一行的格式为 Name1 Name2 p.Name1 和 Name2 为有缘人的姓名,p 是他们之间的缘分值(p 为小于等于 255 的正整数).以一个 End 作为文件结束标志.每两个人之间的缘分至多只被描述一次.如果没有被描述,则说明他们缘分值为 1.

输出文件格式

输出文件仅一个正整数,表示每一对被射中的人之间的缘分的总和.这个和应当是最大的.

分析

这道题是 CTSC 中难得的一道水题,男女显然是构成了二分图,任意两点之间可以匹配的条件是两点之间的距离不能大于给定值,且两点连线上不能有第三者插足.目的是求一个完美匹配,使得缘分值之和最大.

首先运用计算几何的知识,判断任意两点是否可以匹配.处理时尽量使用乘法代替除法,不仅提高速度,还避免了精度误差.

然后运用经典的二分图完美匹配算法.当然也可以使用最小费用最大流,但是速度稍有逊色.

在信息学竞赛中,二分图的应用是很广泛的,问题的关键往往是将实际问题转化为二分图模型.

由于国家集训队论文对此已有详细阐述,本文不再赘述.

·竞赛之窗· 2009IMO 中国国家队训练题

内部资料,根据相关规定,将在《走向 IMO2009》中首次正式发布.

2009 年 6 月,武汉

1. 令 M_n 为使得如下条件成立的正整数 N 的个数:(a) $0 \le N \le 10^n$ (b) $4 \mid N$ (c) N 的各位数字之和也能被 4 整除.证明:对于所有的正整数 n , $M_n \neq \dfrac{10^n}{16}$.

2. 一个正整数 N 被称为稳定的,如果可以将 N 的所有因子(包括 1 和 N)分割成两个互不相交的集合,使得每个集合中的元素和相等.例如,6 是稳定的,因为 1+2+3=6,但 10 不是稳定的.问: $2^{2008} \cdot 2008$ 是否稳定?

3. 证明,对于每个正整数 n ,存在一个整数 x 使得 $2^n \mid x^2 - 17$.

4. 证明存在无穷多的正整数 n ,使得 2^n 以 n 结尾,换句话说, $2^n = \ldots n$.

5. 是否存在一个正整数,能被 2^{2000} 整除,且它的十进制表达式中不存在"0"?

6. 塔函数 $T(n)$ 定义为

$T(1)=2, T(n+1)=2^{T(n)}, n\ge 1$.证明:当 $n\ge 2$ 时, $T(n)-T(n-1)$ 能被 $n!$ 整除.

7. 令 $D(x)$ 为 x 的各位数字之和. 是否存在正整数 n , 使得 $D(n)=2009$, $D(n^2)=1994^2$?

8. 给定正整数 $x_1, x_2, ..., x_n$ 和 $y_1, y_2, ..., y_n$. 和 $x_1+x_2+...+x_n$ 与 $y_1+y_2+...+y_m$ 相等且小于 mn . 证明, 可以选出等式 $x_1+x_2+...+x_n=y_1+y_2+...+y_m$ 中的某些项, 使得重新得到一个等式.

9. 给定任意 8 个实数 a,b,c,d,e,f,g,h , 证明六个数 $ac+bd, ae+bf, ag+bh, ce+df, cg+dh, eg+fh$ 中至少有一个是非负的.

10. 严格递增的函数 $f(n)$ 在正整数上定义, 值域是正整数, 满足条件 $f(f(n))=3n.$ 求 $f(2009).$

11. 找到所有正整数函数 $f(n)$ 满足 $f(f(f(n)))+f(f(n))+f(n)=3n.$

12. 令 $f(n)$ 是一个定义在 R 上的函数, 对于所有实数 x , 满足 $f(x+1)=f(x).$

(1) 证明对于任意有理数 $r>0$, 存在 x 使得 $f(x+r)=f(x)$.

~~(2)~~ 找到一个函数 f 使得 $f(x+\sqrt{2})\ne f(x)$ 对所有实数成立.

13. 有 4 个 $Z^+\to Z^+$ 的函数

$f_1(a,b,c,d)=(a+c,b+d,c,d),$

$f_2(a,b,c,d)=(a-c,b-d,c,d),$

$f_3(a,b,c,d)=(a,b,a+c,b+d),$

$f_4(a,b,c,d)=(a,b,c-a,d-b).$

是否可能找到 f_1, f_2, f_3, f_4 的一个运算表达式(每个函数可以使用不止一次), 使得 $(1,2,3,4)$ 变成 $(4,3,2,1)$?

14. 给定 $2n$ 个互不相同的数 $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$. 一个 $n\times n$ 的方格表如下填数:第 i 行与第 j 列的交点填入 a_i+b_j . 证明:如果每行数之积相等, 则每列数之积也相等.

15. 已知一个 Z^+ 上的多项式 $P(n)>n$ 对于每个正整数 n 成立. 考虑 $x_1=1$, $x_2=P(x_1), ...$, 我们知道, 对于任意正整数 N , 在数列中都存在一项能被 N 整除. 求证: $P(n)=n+1.$

16. 找到所有的整系数多项式 $f(x)$, 满足下列条件:

(a) $f(0)=2009.$

(b) 如果 x 是无理数, 则 $f(x)$ 也是无理数.

注:一个多项式是最简的, 如果它的最高次项系数为 1.

17. 等边三角形 ABC, 被分割成 n 个普通多边形, 如果一条直线穿过多于 40 个给定多边形, n 是否有可能是大于一百万?

18. 令 h 为三角形 ABC 的最长高, 它的外接圆, 内切圆半径分别为 R, r , 求证 $R+r\le h$, 并求等号成立的条件.

19. $\triangle ABC$ 是内角为 α,β,γ 的锐角三角形, 证明

$$\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\gamma)}+\frac{\cos\beta}{\cos(\gamma-\alpha)}+\frac{\cos\gamma}{\cos(\alpha-\beta)}\ge\frac{3}{2}.$$

20. 100 张卡片从 1 到 100 标号(每张卡片不同), 放进 3 个盒子中(每盒至少一张). 这样的放法共有多少种, 使得从中选出 2 个盒子, 每盒中选出 1 张卡片, 只根据它们的和总是足够识别出第三个盒子?

21. 令 S 是空间内 $n(n\ge 3)$ 个点组成的集合, 连接这些点的线段有不同的长度, 其中的 r 条被染成红色. 令 m 为最小的满足 $m\ge\frac{2r}{n}$ 的正整数. 证明:总存在一条由 m 条红色线段组成的路径, 使得这些线段的长度递增.

22. k 个方向标排成一列, 每个可以上下左右指向. 当三个连续的方向标指向不同方向时, 这三个方向标都将被自动转到第四个方向. 证明:这样的转动不能无限进行下去.

23. 设一个 $n\times n$ 棋盘的 n 个方格被染上灰色, 其余方格染上白色. 每次一个新棋盘根据前一个棋盘按下列规则染色:对于棋盘中的每个方格, 检查它自身, 它上面的方格, 它左边的方格. 如果这三个方格中, 有两个或三个灰色, 将这个方格染黑;否则将它染白. 证明:经过若干次操作后, 棋盘中的所有方格将是白色.

24. 给定两个正整数数列 $x_1, x_2, ..., x_n$ 和 $y_1, y_2, ..., y_n$, 满足 $\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}>\frac{y_n}{x_n}(n\ge 1)$. 证明:

存在无穷多个 n 的取值, 使得 $x_n > \sqrt{n}$.

25. 令 M, N 是 $\triangle ABC$ 外的两点, 满足 $AM = AN, \angle AMB = \angle ANC = 90^\circ$. 令 F 是线段 BC 上一点, 满足 $BF : FC = BM : CN$. 证明: $\angle FMN = \angle CAN$.

26. 点 D 在 $\triangle ABC$ 内, 若 A_1, B_1, C_1 分别是 $\triangle BDC, \triangle CDA, \triangle ADB$ 的外接圆与直线 AD, BD, CD 的第二个交点, 证明

$$\frac{AD}{AA_1} + \frac{BD}{BB_1} + \frac{CD}{CC_1} = 1.$$

27. 设 $ABCD$ 为正方形, E 是 AD 上一点, F 是 B 到 CE 垂线的垂足. 设 G 是满足 $BG = FG$ 的一点, 过 G 的 EC 的平行线过 EF 的中点. 证明: $AC < 2FG$.

28. 互相垂直的直线 BE, CF 上的点 B, C 在直线 AD 上, 直线 AB, DC 交于 P, 线段 EC, BF 交于 Q. 证明: $PQ \perp AD$.

29. 令 $n \geq 3$ 是整数, $x_1, x_2, ..., x_n$ 是非负实数, 满足 $x_0 = x_1 = 0, x_n = x_{n-1} - 1$. 证明存在 $j \in \{1, 2, ..., n\}$, 满足

$$|x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j| \geq \frac{4}{n^2}.$$

30. 如果 x, y, z 是区间 $(0, \sqrt{5})$ 上的实数, 满足 $xyz = 1$, 证明

$$\frac{x}{5-y^2} + \frac{y}{5-z^2} + \frac{z}{5-x^2} \geq \frac{3}{4}.$$

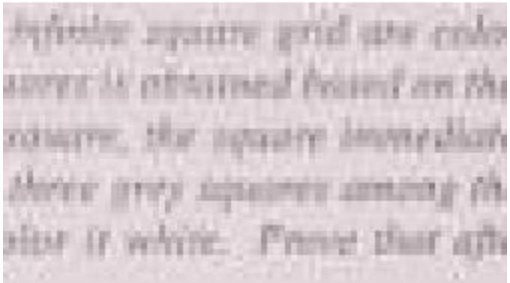
31. 设 m, n 为正整数, 证明对所有的实数 $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \in [0,1]$, 且 $x_i - y_i = 1, i = 1, 2, ..., n$, 下列不等式成立:

$$(1 - x_1 ... x_n)^m + (1 - y_1{}^m)...(1 - y_n{}^m) \geq 1.$$

32. 若 $x_1, ..., x_n \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, 求证

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + ...$$
$$+ \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + ... + \cos x_n.$$

(翻译自极不清晰的英文图片)


nfinite square grid are colo
uare is obtained based on th
square, the square immediat
three grey squares among th
olor is white. Prove that aft

·初等数论·　整数函数方程 f(xy)=f(x)f(y)

(本讲适合数学竞赛)

在函数方程中, 柯西方程是形如 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 的函数方程. 这个方程如果是 $R \to R$, 则可以求得 $f(x) = ax$.

在函数方程 $f(xy) = f(x)f(y)$ 两侧同时取对数, 得到 $\lg f(xy) = \lg f(x) + \lg f(y)$, 令 $g(x) = \lg f(x)$, 又变成了柯西方程的形式, 因此它的解是幂函数 $f(x) = x^a$.

然而, 如果将函数方程的定义域限制在正整数范围内, 就很有研究价值了. 由于丧失了函数的连续性, 限制条件减少了, 因此很多奇怪的数论函数, 都将"粉墨登场". 这也许正是离散数学的难度所在.

我们把定义域为整数, 满足 $f(xy) = f(x)f(y), (x, y) = 1$ 的函数, 称为积性函数. 如果去掉 $(x, y) = 1$ 的限制, 则是完全积性函数.

除了幂函数, 函数

$$h(x) = \begin{cases} 0 & 2 \mid d \\ (-1)^{\frac{d-1}{2}} & 2 \nmid d \end{cases}$$

也是完全积性函数.

这是因为当 $2 \mid x_1x_2$ 时, $h(x_1x_2) = h(x_1)h(x_2)$. 当 $2 \nmid x_1x_2$ 时,

$$\frac{x_1x_2 - 1}{2} \equiv \frac{x_1 - 1}{2} + \frac{x_2 - 1}{2} \pmod 2,$$ 故 $h(x_1x_2) = h(x_1)h(x_2)$.

数论中有关二次剩余的 Legendre 符号和 Jacobi 符号也是完全积性的.

定义 1 设素数 $p > 2$, 定义关于整数 d 的函数

$$\left(\frac{d}{p}\right)=\begin{cases}1, d\text{是}\bmod p\text{的二次剩余}\\ -1, d\text{是}\bmod p\text{的二次非剩余}\\ 0, p\mid d.\end{cases}$$

将$\left(\frac{d}{p}\right)$称为模 p 的 Legendre 符号.

定理 1 $\left(\frac{dc}{p}\right)=\left(\frac{d}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)$.

引理 设素数 $p>2, p\nmid d$, 则 d 是 $\bmod p$ 的二次剩余的充要条件是 $d^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p)$, d 是 $\bmod p$ 的二次非剩余的充要条件是 $d^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\bmod p)$.

证明 由费马小定理, $d^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$, 从而有 $(d^{\frac{p-1}{2}}-1)(d^{\frac{p-1}{2}}+1)\equiv 0(\bmod p)$. 由于素数 $p>2$, $(d^{\frac{p-1}{2}}-1, d^{\frac{p-1}{2}}+1)\mid 2$, 故上述两式中, 有且只有一式成立.

下面证明, d 是 $\bmod p$ 的二次剩余的充要条件是 $d^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p)$.

必要性:若 d 是 $\bmod p$ 的二次剩余, 则必有 x_0 使得 $x_0^2\equiv d(\bmod p)$, 从而 $x_0^{p-1}\equiv d^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p)$. 又由费马小定理, $x_0^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$, 故 $d^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p)$.

充分性:考虑一次同余方程 $ax\equiv d(\bmod p)$, 对 $\bmod p$ 的既约剩余系中的每个 j, 当 $a=j$ 时, 必有唯一的 $x=x_j$ 属于既约剩余系使得同余方程成立.

若 d 不是 $\bmod p$ 的二次剩余, 则必有 $j\neq x_j$, 这样既约剩余系中的 $p-1$ 个数就可按 j, x_j 作为一对, 两两分完, 故有 $(p-1)!\equiv d^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p)$. 由 Wilson 定理知, $d^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\bmod p)$.

回到关于 Legendre 符号的证明.

(1) 若 d_1, d_2 均为 $\bmod p$ 的二次剩余, 则 d_1d_2 也是 $\bmod p$ 的二次剩余.

(2) 若 d_1, d_2 均为 $\bmod p$ 的二次非剩余, 则 d_1d_2 是 $\bmod p$ 的二次剩余.

(3) 若 d_1 是 $\bmod p$ 的二次剩余, d_2 是 $\bmod p$ 的二次非剩余, 则 d_1d_2 是 $\bmod p$ 的二次非剩余.

由于 $(d_1d_2)^{\frac{p-1}{2}}=d_1^{\frac{p-1}{2}}\cdot d_2^{\frac{p-1}{2}}$, 由引理知上述命题显然成立.

定义 2 设奇数 $p>1$, $p=p_1p_2\dots p_s$, p_i 为素数. 定义 Jacobi 符号 $\left(\frac{d}{p}\right)=\left(\frac{d}{p_1}\right)\dots\left(\frac{d}{p_s}\right)$, 其中 $\left(\frac{d}{p_i}\right)$ 表示 $\bmod p_i$ 的 Legendre 符号.

定理 2 $\left(\frac{dc}{p}\right)=\left(\frac{d}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)$.

定理 3 $\left(\frac{d}{p_1p_2}\right)=\left(\frac{d}{p_1}\right)\left(\frac{d}{p_2}\right)$.

由定义和 Legendre 符号的性质可得.

注意, Jacobi 符号并不表示二次同余方程 $x^2\equiv d(\bmod p)$ 一定有解. Legendre 符号是 Jacobi 符号的特殊情况. 计算 Jacobi 符号时, 利用性质 $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$, 可以类似辗转相除法, 快速求值, 并不一定要分解质因数.

定义 3 设 n 的素因子分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$, 定义

$$\Omega(n)=\begin{cases}\alpha_1+\dots+\alpha_r, n>1\\ 0, n=1\end{cases},$$

$\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$.

$\Omega(mn)=\Omega(m)+\Omega(n)$. 此时 $\lambda(n)$ 是完全积性函数.

显然, 两个完全积性函数之积, 商均为完全积性函数.

定理 4 设 $f(n)$ 是不恒为零的数论函数, $n>1$, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$, 则 $f(n)$ 是完全积性函数的充要条件是 $f(1)=1$, $f(n)=f^{\alpha_1}(p_1)\dots f^{\alpha_r}(p_r)$.

证明 必要性

$f(n)=f(1\cdot n)=f(1)f(n), \therefore f(1)=1$.

$f(n)=f^{\alpha_1}(p_1)\dots f^{\alpha_r}(p_r)$ 可由质因子分解式得出.

充分性 假设 $p_1=q_1,\dots,p_t=q_t$, 且当

$j>t$ 时总有 $p_j \neq q_i, 1\le i\le s;$
$q_j \neq p_i, 1\le i\le r$. 这样, mn 的素因子分解式为 $p_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots p_t^{\alpha_t+\beta_t} q_{t+1}^{\beta_{t+1}}\dots q_s^{\beta_s} p_{t+1}^{\alpha_{t+1}}\dots p_r^{\alpha_r}$. 由条件,

$$\begin{aligned} f(mn) &= f^{\alpha_1+\beta_1}(p_1)\dots f^{\alpha_t+\beta_t}(p_t) f^{\beta_{t+1}}(q_{t+1}) \\ &\dots f^{\beta_s}(q_s) f^{\alpha_{t+1}}(p_{t+1})\dots f^{\alpha_r}(p_r) \\ &= f^{\beta_1}(q_1)\dots f^{\beta_s}(q_s) f^{\alpha_1}(p_1)\dots f^{\alpha_r}(p_r) \\ &= f(m)f(n). \end{aligned}$$

·组合游戏·

盲攻击游戏

（本文数学信息学综合）

本文中的盲攻击游戏,是指这样一类组合游戏,在一张图中,目标在顶点处,每次可以沿边移动到相邻顶点;游戏者每次对顶点发起攻击,遭到攻击的目标立即被消灭,并通知游戏者.游戏者只知道图的结构,而不知道目标的位置和移动.要求游戏者设计一个保证能消灭目标的攻击方案.

在进行分析之前,我们首先需要列出几个“显而易见”的事实:

(1)先移动和先扔炸弹是相同的,所以约定先扔炸弹,后移动.

(2)如果某次轰炸后,仍然有可能有人的位置集合与之前的某个状态相同,那么期间进行的轰炸无效,是不成功的.

(3)如果一次轰炸前某位置的旁边有人,且没有被炸死,那么在下一次移动中有可能到达此位置,标记为有人.

1 目标可以不动,每次炸一个点

只要有顶点相连,就无法保证消灭.设顶点A和B相连,攻击A,之后B可以来补充;攻击B,之后A可以来补充.违反了事实(2),是无效轰炸.

2 目标可以不动,每次炸多个点

(2003白俄罗斯数学)M个狩猎者要射杀一只兔子.兔子在正方体的顶点上,狩猎者看不见兔子,也看不见兔子的移动.每次移动,每位狩猎者各选一个顶点(自由地选择),然后向各自选择的顶点一齐开火,如果兔子在被选中的顶点之一,则被射杀;否则它要么跳到某个与之相邻的顶点,要么呆在原地不动.狩猎继续进行.对于 $M=3,4,5$,问:是否存在N,使得N次一齐开火之后,就能射杀这只兔子?

M=3

在每次狩猎者开火之前,兔子可以在原来顶点,相邻三个顶点这四个顶点中选择一个,狩猎者只能向三个顶点开火,兔子总能选择一个顶点逃避.

M=4

加强命题:兔子总可以找到两个顶点逃脱.两个顶点,至少6个相邻顶点(包括自身),狩猎者只能射杀其中的4个,还剩下2个顶点逃脱.如此归纳,总不能保证射杀.

M=5

固定四个角持续射击,对另外四个顶点用剩下的一个人依次射击,则兔子无路可逃,此时N=4.

对于一条直线上的点,由于每次炸一个点毫无效果,因此至少需要两个攻击者.如果两者不相邻,同样无效.因此他们必须同时行动,保持相邻.

这样问题便简单了,第一次炸1,2,第二次炸2,3,以此类推,炸完整条直线,必定消灭所有目标,因为没有目标能一次穿越两个炸点到达已轰炸区域.

对于一棵树,如果可以选出一条主链,使得这条主链上的支链深度不超过1,则可以用两个攻击者实现.按照原来的方法炸主链,到达支链时一个攻击者守住路口,另一个攻击者进入支链炸一次,即可消灭.

对于一棵支链深度不小于2的树,用两个攻击者不可能实现.不妨设最简单的情形

```
1 2 3 4 5
    6
    7
```

其中3为交点.此时,两个攻击者首先炸12,再炸23,在非轰炸时段,34567便会充满人,此时如果我们不炸3,不仅马上会被旁边的移动过来,就有可能重新进入2,前面的努力白费;如果炸3,就只能炸4567中的一个,无论如何都会有紧挨着3的生存位置,使3处的攻击者不能脱身,单凭一个人不能控制相邻结点,矛盾.

事实上,所选的相邻两个轰炸者,轰炸的目标两侧不能全部有人,否则炸后两侧的人会过来,敌人毫发无损,轰炸无效.

然而,利用3个攻击者,就可以轻松实现.到达岔口时,派一个人持续轰炸3,守住岔口,然后12继续推进.这样的方式还适用于不存在更深的支链,即主链的支链全部是直线的情况,依次派兵守住岔口,另两个轰炸内部.

对于更复杂的树,3 个攻击者又不够了.如果存在更深的支链,就需要攻击者守住更加靠里的岔口.一旦一个岔口被守住,内部就形成了一棵与外界隔离的树,可以递归计算.逐步缩小规模,直到一条直线.需要的攻击者数等于递归层数+2.

如果要求最小的递归层数,就很困难:如何找到合适的主链?选择支链数最多的,显然错误;由于一时无法预知支链内部的情况,无法使用简单的观察得知主链的好坏.

但主链的选择有一定的规律:主链距离两个端点最近的两条支链,一定是一条直线.否则选择那条支链中最长的作为主链,原来主链的端点到分叉点部分作为支链,一定不比原来的分法差.

下面讨论一个有环图的情况.对于一个环,两个攻击者是不够的.对于三角形 ABC,如果攻击 AB,C 会立即到达 AB 两个点,攻击无效.环更大的情况类似,两侧的未轰炸点会分别到达两个被轰炸点.如果有三个攻击者,可以首先把守住环上的一点,然后再利用另两个攻击者炸一圈即可.

通过环上的讨论,我们发现,派“守卫”占据一些顶点是必要的,而且这个点一旦被占,相当于被删除,起到将整个图分成若干独立的部分,以便分别消灭的作用.

如果环上有支链,显然应该守住有支链的分界点,这样全图分成了两部分;反之,守住环上没有支链的位置,全图还是一个整体,一定不是最优的.

进一步,如果一个点的周围形成了多个环,占领此点,相当于一次性去掉多个环.因为每个环上至少要有一个卫兵才能实现攻击,因此每个卫兵应当守住尽量多的环.

因此,我们可以找出所在环最多的那个顶点,删除;再在新图中找到所在环最多的删除,以此类推,直到没有环存在.可以证明,这种贪心方法是正确的.首先,不论按照何种顺序砍断图中的边,所需的次数是相同的(化学中计算不饱和度就是这样).然后,设所在环最多的顶点为 A.这些环迟早是要删除的.如果首先删除了环非最多的顶点 B,它所在的环包含环最多的顶点 A,则这个环砍断的先后无关紧要,总之只需删除一次.而选择最多的顶点 A,还可能更早的去掉其他顶点,因此选择 B 一定不优于 A.

至此,我们基本讨论了目标允许不动,一次炸多个点的情况,首先砍断环,然后占领树中的分界点,最后用两个相邻的攻击者依次轰炸即可.

3 目标必须移动,每次炸一个点

目标必须移动和可以不动,差别很大,因为可以不动会使得原来有人的不会消失,只会像 Floodfill 一样不断扩张.而移动使得原来有人的一些点变得没有人,在不同时刻的位置的奇偶性有一定的规律,需要的攻击者大大减少.

下文转自《骗分导论·信息学竞赛》,限于篇幅,删除了部分分析和程序代码.全文见此书 7.1 节“数学方法”.

首先考虑只有一个点、一条线段的“平凡”情况,显然能够炸死.对于 3 个点连成一条线的情况,不妨从左至右设为 A、B、C,则先炸 A,A 中一定没有人;下一步移动,A、B、C 又都有可能有人,因为 B、C 仍然是不定向移动的,回到原来状态,轰炸失败.先炸 C 的道理相同.所以如果能够炸死,一定先炸 B.第二次轰炸前,A、C 的人一定到达 B,再对 B 进行轰炸,一定炸死.

三个点的连接方式除了一条线,还有“环”的可能.这时轰炸 A、B、C 是等效的,不妨设为 A.轰炸完后,剩下两侧的点 B、C 可能补充过来,导致 A 又有人,轰炸无效.所以三元环是不可能炸死的.类似的,n 元环也不可能炸死.不论炸哪个位置,由于环的连通性,两侧的点都可以补充过来,也可以由另一侧的点移动过来,所以不成功.我们得到一个重要的结论：只要图中存在环,就不可能炸死.下面只需要考虑“树”的情况.

从简单入手,考虑 4 个点 A、B、C、D 成为一条线的情况.先炸 B,可能到 B、C、D；再炸 C,可能到 A、C、D；炸 D,可能到 B、D；再炸 D,可能到 A、C；炸 C,可能到 B；炸 B,轰炸成功.因此轰炸序列 BCDDCB 是可行的.我们发现一个有趣的事实：从 2 号点依次向右轰炸,再从右侧端点依次向左轰炸,最后一定炸死.

仔细思考,发现是有依据的.对 n 个点排成一条线的情况,用数学归纳法：假设现在已经正向轰炸到了第 k 个点,那么前面 k-1 个点中只有一半的点是有人的,它们相间排列,形成 k-2, k-4, k-6... 1 或 2 的序列.轰炸 k 个点之后,由于前面的点必须移动一步,于是改变了奇偶性,形成 k-1, k-3, ...2 或 1 的序列.第 k 个点刚被轰炸,显然没有人;后面的点不受影响.于是,我们的奇偶相间序列向前推了一位,到达 k+1 个点处.如此归纳,直到轰炸完第 n 个点,这 n 个点一定成奇偶相间排列,亦即只有一半的点有人.

下面的思考就简单了.既然一次轰炸能使有人的点控制在一半,且与奇偶有关,那么换一个奇偶性,再轰炸一次,就能使有人

的点在另一半,两者取交集,轰炸成功.为了避免奇偶讨论,我们采用了“反向轰炸”的方法,即从 n 开始,逆着原来的步骤轰炸.我们惊喜的发现,由于奇偶性相反,反向轰炸点右侧都不再有人,左侧的人正在被逐一消灭.

这不禁使我们想到物理学中波的传播与干涉：一列波随着时间的推移,波峰与波谷作周期性变化；波的传播需要时间,波前之前的按振动规律振动,波前之后的尚未开始振动.如果从反向引入一个频率相同、相位相反的波,两列波的叠加会发生干涉现象,导致反相波传到的位置振动停止.

于是,我们解决了一个基础的,也是至关重要的问题：一列点的情况,可以从头开始,逐个轰炸到尾部,再从尾部开始逐个轰炸到头部,就能保证轰炸成功.

对于其他较为复杂的树形结构,我们想,利用化学上的思想,找到“最长链”恐怕十分重要.从直观上想,如果整棵树错综复杂,“旁生枝节”很长很多,就很难找到可以堵住的地方.于是我们从有三个长度为 2 的链的简单情况入手.

```
1 2 3 4 5
    6
    7
```

(1)Bomb 2, Save 2,3,4,5,6,7
(2)Bomb 3, Save 1,3,4,5,6,7
(3)Bomb 6, Save 2,3,4,5,6
(4)Bomb 3, Save 1,3,4,5,7
(5)Bomb 4, Save 2,6,5
(6)Bomb 5, Save 1,3,7
(7)Bomb 5, Save 2,4,6
(8)Bomb 4, Save 1,3,7
(9)Bomb 3, Save 2,6
(10)Bomb 6, Save 1
(11)Bomb 3, Save 2
(12)Bomb 2

由上述的描述,读者可能已经发现,只要支链深度不超过 2,就可以用上述方法解决.因此矛盾的焦点指向了支链长度不小于 3 的情况.

```
1 2 3 4 5 6 7
      8
      9
      10
```

显然,不同于上个例子,如果首次轰炸支链上的点,旁边的点会立即补充过来,导致轰炸失败.所以首次轰炸一定要选择中间节点 4. 我们要证明,不存在这样的轰炸序列,亦即要找到一种对策,不论如何轰炸都能逃脱.

(1)First bomb 4.Goto 4 after bombed.

(2)If bomb 1 or 2, it’s useless and back to (1).So must bomb one of 3,5,8. Take 3 into consideration.

Then we have to hide in 5 or 8.

(3)If not bomb 4 again, go back to 4, situation back to (1).

If bomb 4, we have to go to 6 or 9.

(4)If not bomb 5 or 8, we go back to it immediately. Remember: Any reappear of situation will lead to a infinite circulation. So must bomb 5 or 8. Take 5 as an example. Then we go to 7,8,10, avoiding the bomb.

(5)If bomb 4, go back to 6 or 9.

So must bomb a non-4 point.

But 8 is near to 4, and we can go there!

The situation (1) reappears, and the bomber has no way out.

因此,只要存在形如上例这样支链深度不小于 3 的情况,就一定不存在这样的轰炸序列.

总结上面的讨论,我们可以得出存在轰炸序列的充要条件：

（1）图中不存在环

（2）树中支链深度不超过 2

下面就是具体的程序实现.

首先执行的一定是“判断不存在环”的操作,使用拓扑排序即可解决.

下面就需要判断树中支链的深度不超过 2.有几种方案可以选择.

1.利用树的结构,首先进行一次深度优先搜索,计算每个节点子树的最大深度.对于一个至少有两棵子树的节点,如果它的父枝、两个子枝均深度大于 3,则退出.

2.模仿有机化学中的方法,首先找到主链（最长的链）,这一步可以使用 NOIP“树网的核”一题的算法解决.然后从主链上的每个分支点出发,对侧链进行深度优先搜索,一旦深度达到 3 则失败退出.

3.考虑到以上算法中找到主链并没有起到关键的作用,所以简单的对每个节点进行深度优先搜索,一旦深度达到 3 则失败退出.

4.考虑到“深度为 3”的特殊情况,忽略掉树的“上下级”性质,而只利用“无环”性质,可以直接寻找三条链,每条链长度不小于 3,则失败退出.

上文转自《骗分导论·信息学竞赛》

4 目标必须移动，每次炸多个点

我们继续考虑，对于深度不小于 3 的树，又需要多少轰炸者才能完成任务?

显然，采用上文中的“占据点”的战略，如果有两个轰炸者，只需占领分叉点，然后对几个子树分别用另一个人轰炸. 如果剩下的子树仍然支链深度不小于 3，就再放一个看守，递归处理. 这类似于“目标可以不动”的情况.

对于存在环的情况，也类似于目标不动的情况. 事实上，目标移动和目标不动，除了支链深度为 2 的情况(相差 2)，所使用的最少轰炸者数恰好相差 1，这个 1 就是单个轰炸者往返轰炸与两个相邻轰炸者一扫而光的区别，也是目标必须移动带来奇偶性变化的结果.

盲攻击问题中的攻击者，如果像目标一样，也限制每次只能移动到相邻位置，难度并不因之增大. 注意到上述讨论中，攻击者的移动都是连续的，即使需要攻击不同子树，也可以分而治之，完成后逐格回到有兵把守的分界点，再攻击另一个子树. 因此，上面的结论仍然成立.

盲攻击问题还有另一个版本，就是目标的移动有一定规律. 例如这样一个问题:

在一条有 n 个射击孔的直线上，一只兔子从某个位置出发，每分钟向右跳动一个射击孔；狩猎者不能看到兔子，每分钟射击一次. 问狩猎者应当怎样射击，才能用最少的次数射中兔子?

解：首先证明，射击次数不少于 $[\frac{n}{2}]+1$.

假设进行了 $\le [n/2]$ 次射击，则在从左侧起的初始位置 $1,2,\ldots,[n/2]+1$ 中，到达位置 $[n/2]+1$ 所用的时间是连续的 $0,1,\ldots,[n/2]$. 射击 $[n/2]$ 次，也考虑此位置被击中的兔子到达位置 $[n/2]+1$ 的时间，至多有 $[n/2]$ 个不同的时间(如果有重合，则更少)，故必有一个时间没有射击. 这样兔子便可以从这个没有射击的时间找到初始位置，从这个位置出发就不会被击中.

其次证明，射击 $[n/2]+1$ 次可以保证击中兔子. 首先对位置 $[n/2]$ 连续射击 $[n/2]$ 次，这样初始时位于前 $[n/2]$ 位置的兔子都被消灭；最后射击 n 位置，初始时位于 $[n/2]+1\ldots n$ 的兔子也被击中.

盲攻击问题的最优化策略显得更为扑朔迷离. 首先，确定攻击者的最少个数，涉及到主链的选择问题，目前笔者尚没有高效的算法；其次，确定攻击所需要的最小步数，像上面的打兔子问题一样，也是极为困难的.

盲攻击问题，相对于可见攻击问题，当目标的移动规则更为复杂时，往往是不可解的. 因此，采用随机化算法也是必要之举.

如果我们充当盲攻击问题中的目标，也是很有趣的. 如何找到一种逃避方案，使得攻击者无法在规定步数内消灭自己?倘若这些经过深入研究，作为交互式题目，或团队程序大战的课题，一定能够在开放状态博弈之外，开辟一片新天地.

· 数海拾贝 ·

混沌数列是否随机

在一定的环境条件下中，种群的数量往往符合数列 $\{p_n\}$，其中 $p_1\in(0,1)$, $p_{n+1}=kp_n(1-p_n)$，$k\in(0,4)$.

这是一个著名的“没有通项公式”的递推关系.不妨设 $p_1=0.5$,当 $k\in(0,2)$ 时,数列 p 递减,趋近于 0,图像类似反比例函数,开始减少速度很快,然后逐渐减慢；当 $k=2$ 时,显然数列每项均为 0.5；当 $k\in(2,3)$ 时,数列 p 将在分别位于 $(0,0.5),(0.5,1)$ 的两个值之间摆动,最终趋向于中间值 0.5；当 $k\in(3,4)$ 时,数列 p 的变化规律较为复杂,随着 k 的增大,数列的变化越来越随机；尤其是 $k\ge 3.8$ 时,几乎无规律可循,可认为是随机数列,产生“混沌”现象.本文讨论的就是混沌现象中的随机性.

很多人也许认为，在这样的混沌数列中，数在各个相等区间内的出现概率是相同的，并准备用这样的数列作为随机数发生器. 事实并非如此，我们通过实验来证明.

取初值 $p_1=0.5$(取何种初值影响不大，因为数列的混沌性，不久便会到达各种初值所在处，不会影响大量枚举的概率)，依次计算 10000000 个 p_i，并分别统计落在区间 $(0,0.1),[0.1,0.2),\ldots,[0.9,1)$ 的 p_i 个数.

当 $k=3$ 时，仅有简单的一个峰 0.667. 当 $k=3.5$ 时，变为三个峰 0.3，0.5，0.8，平均值为 0.646. 当 $k=3.56$ 时，0.3 和 0.5 的

峰开始向 0.4 扩散，$k=3.58$时，0.8 的峰也开始扩散到 0.7. $k=3.60$时，扩散波及到 0.6，这时出现了双峰骆驼的分布图像.
$k=3.61$时，出现 0.3 和 0.8 两个高峰，除 0.1 和 0.2 没有分布外，两侧递减. 其间平均值在 0.646 和 0.647 间摆动. $k=3.63$时，出现了突然的高峰集中分布，0.3 和 0.5-0.9 分别占有 1/6，应该是恰好形成 6 个一循环的情况，平均值 0.66，之后逐渐增大.
$k=3.64$时，扩散波及到 0.2，高峰削弱.
$k=3.68$时，0.3 的高峰消失，0.8 的高峰转移到 0.7.

进入$k=3.7$，分布趋向于平均，但 0.7 和 0.8 附近的高峰虽然有所降低，但仍然居高不下，与此同时，0.2 附近的高峰悄然兴起，平均值也逐渐回落. $k=3.78$时，0.2 的高峰波及到了 0.1，而 0.8 的高峰也在向 0.9 转移，平均值降到 0.645.

当$k=3.8$时，确实进入了混沌状态，分布开始呈现两头大的局面，但差距正在缩小，形成了 0.3，0.4 的平原和 0.5，0.6，0.7 的高原. 这时平均值也开始加速骤降. $k=3.83$，又是一个特殊点，此时出现 0.1，0.5，0.9 三个峰，形成了 3 个一循环，平均值为 0.539.
$k=3.85$是平均值的最低点 0.531，
$k=3.86$时，随着三个峰的分散，变成了三峰骆驼的景观，平均值升至 0.584. 之后的发展，0.5 的中间峰向 0.3 移动，0.5 和 0.9 峰削弱，中间形成平原.

进入$k=3.90$，最后坚守阵地的 0.0 也出现了分布，平均值升至区域最高点 0.592. 当$k=3.94$时 0.1 和 0.2 峰另起炉灶，0.9 峰重振雄风. 随着k的增大，两侧的峰越来越接近端点 0，1，而中间的分布则越来越平坦. 到$k=3.99$时，平均值降到 0.532. 直到$k=3.999$，已经基本实现对称分布，形成了水槽形状，平均值到达接近中点的 0.514. 当$k=3.999999$时，平均值距离中点的偏差才降到千分之一以下.

我们可以看到，在任何时刻都不会出现令人满意的平均分布，总会出现这样那样的高峰，尤其是 0.7-0.9 一带徘徊的大数峰. 而即使是平原地带，也有凹凸起伏，不适宜用作随机数发生器.

混沌数列的混乱性，给我们从局部的角度研究数列的动态带来了很大麻烦. 但是，通过放眼整体，研究数在区间内不同位置的分布，可以另辟蹊径，对较长一段数列的平均值，期望值带来一些启示.

·代数变形· 数列逐差和的最值

（本讲适合数学竞赛）

数列的逐差，指数列中相邻两项或任意两项之差. 逐差和，就是将所有这样的差值求和，或者变相求和. 要求得这个和得最大最小值，需要数列是等差数列等特殊条件，或者有特殊的排列顺序. 这类问题的共同特点是，和式是轮换式或对称式，为我们处理时“不妨设”提供了方便，结论也是有趣的. 可惜的是没有看到文献研究此类问题，所以只能自名为“逐差和”，见笑于大方之家.

1 $\sum|a_i-a_{i+1}|$

（这是下期预告，发出文章开头，仅供参考）

·初等数论· Pell 方程

（本讲适合数学竞赛）

定义 Pell 方程是一类整数方程，形如 $x^2-dy^2=1$，$x,y\in Z$，其中d是一个非平方数. 形如$x^2-dy^2=a$的方程称为 Pell 型方程.

国内学科竞赛相关资料中，Pell 方程的理论并不完备，本文加以略述.

其中，d不是平方数的条件是重要的. 若$d=b^2$，原方程可分解为 $(x-by)(x+by)=a$，将a因式分解，讨论两个因子的取值，再联立求解即可，不需要 Pell 方程.

对于一般的 Pell 方程，我们首先在实数范围内因式分解，
$(x-\sqrt{d}y)(x+\sqrt{d}y)=a$ 为了处理形如 $x+\sqrt{d}y$ 的数，我们模仿复数，定义 $z=x+y\sqrt{d}$，其共轭复数 $z=x-y\sqrt{d}$.

模 $N(z)=z\,|\,z\,|=x^2-dy^2\in Z$

不难发现, 集合 $\{x+\sqrt{d}y\,|\,x,y\in Z\}$ 是自封闭的, 即其中任意两个数的和, 差, 积仍然在集合中.

因此, $x^2-dy^2=a$ 可以写为 $N(z)=a, z=x-y\sqrt{d}\in Z[\sqrt{d}]$. 特别的, 对于 Pell 方程, 可以写为 $N(z)=1, z\in Z[\sqrt{d}]$.

1 Pell 方程

显然, Pell 方程有一个平凡解 $(1,0)$, 即 $N(z)=1$ 的解 $z=1$.

定理 如果 z_0 是满足 $z_0>1$, $N(z_0)=1$ 的 $Z[\sqrt{d}]$ 的最小解, 那么方程 $N(z_o)=1$ 的所有解都由 $z=\pm z_0{}^n, n\in N$ 产生.

证明 对于 $z>0$, 都存在正整数 k, 使得 $z_0{}^k\le z\le z_0{}^{k+1}$, 则数 $z_1=z\overline{z_0}^k$ 满足 $1\le z_1<z_0$,
$N(z_1)=N(z)N(z_0)^{-k}=N(z)=1$. 由 z_0 的最小性知, $z_1=1, z=z_0{}^k$.

推论 如果 (x_0,y_0) 是 Pell 方程的最小非平凡解, 则所有的自然数解 (x,y) 都满足 $x+y\sqrt{d}=\pm(x_0+y_0\sqrt{d})^n, n\in N$.

由于 $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}, y=\dfrac{z-\overline{z}}{2\sqrt{d}}$, Pell 方程的所有解可以表示为

$$x=\frac{z_0{}^n+\overline{z_0}^n}{2}, y=\frac{|z_0{}^n-\overline{z_0}^n|}{2\sqrt{d}}.$$

例如, 方程 $x^2-2y^2=1$ 的最小非平凡解是 $(x,y)=(3,2)$, 因此所有正整数解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2} \\ y=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

下面证明, 每个 Pell 方程都存在最小非平凡解.

Dirichlet 定理 设 α 是一个无理数, n 是一个正整数. 则存在 $p\in Z, q\in\{1,2,\ldots,n\}$ 使得

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{(n+1)q}.$$

证明 上述定理等价于

$$|q\alpha-p|<\frac{1}{n+1}.$$

令 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分.

在 $n+2$ 个 $[0,1]$ 上的数 $0,\{\alpha\},\{2\alpha\},\ldots,\{n\alpha\},1$ 中, 由抽屉原理, 必有两个之差小于 $\dfrac{1}{n+1}$. 如果它们是 $\{k\alpha\},\{l\alpha\}$, 直接令 $q=|k-l|$. 如果它们是 $\{k\alpha\}$ 和 0 或 1, 则令 $q=k$. 换句话说, p 是最接近 $k\alpha$ 的正整数.

推论 设 α 是任意实数, 存在无穷多对正整数 (p,q), 满足 $\left|\alpha-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^2}$.

将推论应用于 $\alpha=\sqrt{d}$, 存在一个正整数 $n<2\sqrt{d}+1$ 使得方程 $x^2-dy^2=n$ 有无穷多组正整数解. 存在两个不同解 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 满足 $x_1\equiv x_2, y_1\equiv y_2$. 设 $z_1=x_1+y_1\sqrt{d}, z_2=x_2+y_2\sqrt{d}, z_1>z_2$, 则 $z_0=\dfrac{z_1}{z_2}>1$ 是模为 1 的 $Z[\sqrt{d}]$ 的元素, 对应着 Pell 方程的一个非平凡解 (x_0,y_0).

2 Pell 型方程

定理 方程 $x^2-dy^2=-1$ 有整数解当且仅当存在 $z_1\in Z[\sqrt{d}], z_1{}^2=z_0$.

证明 充分性显然.

必要性: 考虑方程 $N(z)=-1$ 的最小解 $z=z_1\in Z[\sqrt{d}], z>1$, 类似上面可证 $1\le z_1<z_0$. 既然 $z=z_1{}^2<z_0{}^2$ 是 $N(z)=1$ 的解, 我们必然有 $z_1{}^2=z_0$.

考虑一般的方程 $N(z)=a$. 下面证明, 方程的所有解满足 $1\le z\le z_0$, 其中 z_0 是 $N(z)=1$ 的最小非平凡解. 因此, 检查有限多个 x 的取值就足够了.

定理 若 a 是方程 $N(z)=x^2-dy^2=a$ 的整数解, 则存在一个解 $|x|\le\dfrac{z_0+1}{2\sqrt{z_0}}\sqrt{|a|}$, 对应的 $y\le\sqrt{\dfrac{x^2-a}{d}}$.

证明 若 z_1 是方程 $N(z)=a$ 的解, 则存在 $m\in Z$, 满足 $\dfrac{a}{\sqrt{z_0}}\le z_0{}^m z_1<a\sqrt{z_0}$. 而

$z_2 = {z_0}^m z_1 = x + y\sqrt{d}$ 是方程 $N(z)=1$ 的解, 满足 $2|x| = \left|z_2 + \frac{a}{z_2}\right| \le \max\limits_{[a/\sqrt{z_0}, a\sqrt{z_0})} \left|t + \frac{a}{t}\right|$
$= \frac{z_0+1}{\sqrt{z_0}}\sqrt{|a|}$.

例如, 求 $x^2 - 7y^2 = 2$ 的整数解.

Pell 方程的最小解是 $z_0 = 8 + 3\sqrt{7}$. 寻找方程 $N(z) = 2$ 的解 $z = x + y\sqrt{7}$ 满足

$x \le \frac{z_0+1}{2\sqrt{z_0}}\sqrt{a} = 3, y = \sqrt{\frac{x^2-2}{7}} \le 1$. 这样的解只有 $z = 3 + \sqrt{7}$. 因此, 原方程所有的解 (x, y) 由下式给出:

$x + y\sqrt{7} = \pm(3+\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})^n, n \in N$.

Pell 方程的重要意义在于, 任何二次二元丢番图方程都可以转化成 Pell 型方程.

对于一般的二次方程, 也可以适当代换成 Pell 方程. 例如 $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$, 将 $u = y - 2x$ 代换, 得到 $u^2 = 3x^2 + 1$, 解为 $x + u\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n$.

·组合构造·

子段和问题

（本讲适合数学竞赛）

子段, 指一个数列的连续若干项. 子段和, 就是这些连续项之和. 本文中的子段和问题, 讨论和的正负.

1 和的正负已知, 求数列个数

(2002 保加利亚) 设 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是 $n \ge 3$ 个互异的整数, 其和为正数. 如果它们的一个排列 $b_1, b_2, ..., b_n$ 满足: 对任意的 $k = 1, 2, ..., n$ 均有 $b_1 + b_2 + ... + b_k > 0$, 则称这个排列是好的. 求好排列个数的最小值.

解: 首先构造, 好排列的个数为 $(n-1)!$. 取 $a_1, a_2, ..., a_{n-1} < 0$, 而 $a_n = 1 - (a_1 + ... + a_{n-1})$, 此时只有取 a_n 为首项, 其余 $n-1$ 项任意排列满足题意, 否则到达 a_n 之前的子段和为负. 此时好排列有 $(n-1)!$ 个.

下面证明, 好排列的个数至少为 $(n-1)!$. 只需证明, 在排列组 $(a_1, a_2, ..., a_n), (a_2, a_3, ..., a_n), ...,$ $(a_n, a_1, ..., a_{n-1})$ 中, 至少有一个排列是好排列.

考察所有以 a_i 为首项的子段和 $a_i + a_{i+1} + ... + a_{i+t}$, 其中下标 $\bmod n$ 理解. 对所有可能的 i, t, 必有一个子段和最小. 由于至少存在一个非正数, 最小子段和 $a_i + a_{i+1} + ... + a_{i+t} \le 0$. 若有多个最小子段, 取其中最长的一个. 我们证明 a_{i+t+1} 开始的子段和恒为正.

不然, 若存在正整数 k, 使得 $a_{i+t+1} + a_{i+t+2} + ... + a_{i+t+k} \le 0$, 则 $a_i + ... + a_{i+t} + a_{i+t+1} + ... + a_{i+t+k}$ $\le a_i + ... + a_{i+t}$, 与子段和的最小性矛盾.

因此在如上所述的 n 个轮换排列中, 至少有一个是好排列. 因此在全部 $n!$ 个排列中, 至少有 $(n-1)!$ 个好排列.

2 和的正负已知, 求子段最大长度

在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知任意 p 项之和为正, 任意 q 项之和为负, 求 n 的最大值.

首先讨论 $(p,q)=1$ 的情形, 我们证明 $n_{\max} = p + q - 2$.

假设 $n = p + q - 1$, 将数 $a_1, ..., a_{p+q-1}$ 排列成 $p \times q$ 的矩阵, 其中第 i 行第 j 列放置 a_{i+j-1}. 这样, 对每一个行求和, 均为正数, 表格中所有数之和为正; 对每一个列求和, 均为负数, 表格中所有数之和为负, 矛盾.

若 $n > p + q - 1$, 去掉尾部的若干个数形成 $n = p + q - 1$, 同样矛盾.

下面构造 $n = p + q - 2$.

令所有的正数和为 1, 所有的负数和为 −1(取其他数亦可, 每组正数与负数的组合唯一确定一个数列). 由于共有 $n - p + 1$ 个 p 项和, $n - q + 1$ 个 q 项和, 将每个 a_i 视作一个未知数, 则共有 $p + q - 2$ 个未知数, $p + q - 2$ 个方程, 一般情况下有唯一解.

通过以下消元方法, 可以求得这个 n 元方程组的解. 首先, 在 1 式中, 将 a_1 用关于

$a_2, a_3, \ldots, a_n$ 的表达式表示, 并将表示结果代入 $2, 3, \ldots, n$ 式中, 这样未知量 a_1 被消去了. 然后, 在 2 式中, 将 a_2 用关于 $a_3, a_4, \ldots, a_n$ 的表达式表示, 代入 $3, 4, \ldots, n$ 式中, 消去未知量 a_2, 以此类推. 一般的, 第 k 个式子对 a_k 消元, 剩下 $n-k+1$ 个未知数. 最后, 第 n 个式子剩下一个未知数 a_n, 就是普通的一元一次方程. 解出 a_n 后, 依次代回 $n-1, \ldots, 1$ 式, 通过第 k 式和已知的 $n-k$ 个未知数取值, 解出第 k 个元素, 直到解出所有 n 个未知数. 这样, 只要证明 a_n 所在的一元一次方程有唯一解.

下面用数学归纳法证明. 不妨设 $p > q$ (否则都添上负号). 当 $q = 1$ 时, 数列的每一项均为负, $p-1$ 项的数列中不存在连续的 p 项, 而增加一项便会与和为正矛盾, 故此时 $n_{\max} = p+q-2$ 成立.

对于一般的情形, 将方程组分为若干组

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_p > 0 \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_q < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + \ldots + a_{p+1} > 0 \\ a_2 + a_3 + \ldots + a_{q+1} < 0 \end{cases}$$

......

$$\begin{cases} a_{q-1} + \ldots + a_{p+q-2} > 0 \\ a_{q-1} + \ldots + a_{2q-2} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_q + \ldots + a_{2q-1} < 0 \\ \ldots \\ a_{p-1} + \ldots + a_{p+q-2} < 0 \end{cases}$$

事实上, 是将连续 p 项的每个方程与首项相同的连续 q 项的对应方程配对. 剩下的 $p-q$ 个连续 q 项的方程另成一组.

下面对配对的方程组进行消元, 就是两式相减, 得到

$$a_{q+1} + \ldots + a_p < 0$$

$$a_{q+2} + \ldots + a_{p+1} < 0$$

$$\ldots$$

$$a_{2q-1} + \ldots + a_{p+q-2} < 0$$

共 $q-1$ 个方程. 结合未配对的连续 q 项的 $p-q$ 个方程, 共形成了 $2p-1$ 个方程, 未知数的范围是 $a_q, \ldots, a_{p+q-2}$.

注意到 $p > q$ 的假设, 由于只有方程 $a_q + \ldots + a_{2q-1} < 0$ 含有未知数 a_q, 它可以在其余未知数全部推出之后最后得到, 不影响结果, 故不予考虑.

现在考虑 $a_{q+1}, a_{q+2}, \ldots, a_{p+q-2}$ 这 $p-2$ 个未知数. 显然其中任意连续 q 项之和为负. 而根据前面两式相减得到的 $q-1$ 个方程, 这 $p-2$ 个数恰好满足任意连续 $p-q$ 项之和为正.

因此, 我们只需证明在 $p-2$ 个数中, q 项和为正, $p-q$ 项和为负时结论也成立. 以此类推. 这样的过程事实上是在进行辗转相除法, 由于 $(p,q)=1$, 经过有限步, 必然化归到 $p>1, q=1$ 的问题上来, 这是已经证明的.

构造答案时, 只需逆着辗转相除的过程, 根据已经求得取值的未知数, 将上面联立的方程中按照下标递减的顺序, 逐个求出取值, 即可得到整个数列. 如果希望数列是正整数, 由于所有求得的数都是有理数, 可以同时乘上公分母. 因此 $n_{\max} = p+q-2$.

其次讨论 $(p,q) = d > 1$ 的情形. 我们证明 $n_{\max} = p+q-(p,q)-1$.

假设 $n = p+q-(p,q)$ (若更大, 去掉一些项即可), 则将这 n 个数依次分为 $\frac{n}{d}$ 组, 第 k 组有 d 个数 $a_{dk+1}, a_{dk+2}, \ldots, a_{dk+d-1}$. 将这 d 个数求和生成一个新数, 令 $b_k = a_{dk+1} + \ldots + a_{dk+d-1}$, 则对于 $\frac{p}{d} + \frac{q}{d} - 1$ 项的数列 $\{b_{\frac{n}{d}}\}$, 其任意 $\frac{p}{d}$ 项之和为正数, 任意 $\frac{q}{d}$ 项之和为负数. 此时 $(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}) = 1$, 由前面的讨论知, 矛盾.

关于构造, 类似 $(p,q)=1$ 时的方法, 先逐步辗转相除, 化归到 $(p,q)=d$ 的状态, 即 $p = kq, k \in Z^+$ (此处的 p,q 与原来的不同). 此时, 不妨设每 q 项之和为负(为正类似), 则可以使每项均为负, 连续 $kq-1$ 项, 是可行的. 利用数学归纳法逐级归纳, 可以类似的得到 $p+q-(p,q)-1$ 项取值. 但这种方法不易操作, 所以我们采用下面的添项法.

基于 $(p,q)=1$ 的情况, 首先构造

$(\frac{p}{d},\frac{q}{d})$ 的情况，得到长为 $\frac{p}{d}+\frac{q}{d}-2$ 的数列，然后除了中间一项，将每一项平均分为 d 个数；对于中间一项，令分出的最后一个数为原数，而其他 $p-1$ 个数均为 0. 这样形成长为 $p+q-2d$ 的数列. 容易验证，这样的数列满足题意.

此时，由于不等号的存在，一定可以在数列的末端适当添上 $d-1$ 个绝对值很小的数（正负根据需要而定），他们的和小于任何两个 p,q 个数之和的差的绝对值，此时仍然满足题意.

例如，对于 $p=6,q=4$ 的情况，首先构造 $p=3,q=2$，其中一个解是(-4, 6, -4). 将每项按照要求分拆成2项，得到(-2, -2, 0, 6, -2, -2). 最后在数列末尾添上-1，得到数列(-2, -2, 0, 6, -2, -2, -1)，任意 6 项之和为负，任意 4 项之和为正，满足题意.

添上 d 个是不可行的，这样便可以使得一组 dk 个数和一组 $d(k-1)$ 个数恰好差 d 个，导致矛盾. 在数列的两端同时添数也是不满足题意的，因为中间一项的不平均分配只能偏向一端，令这端可以添入 $p-1$ 个数. 若没有这样的偏向，则前面的项恰好差一个数，故添入的数绝对值必须不小于这个数；这又与另一个不等式矛盾. 因此不能两侧兼顾，只能在一侧添 $p-1$ 项.（本段只是一个说明，项数超过 $n_{\max}$ 的情况上文已证）

综上，对于所有的 p,q，

$n_{\max}=p+q-(p,q)-1$.

按照本文所述的方法，先归纳解不定方程组，再适当添项，可以编写计算机程序. 对于项数为 n 的情况，可以在 $O(n^2)$ 的时间内完成构造. 程序的时间瓶颈主要是解线性方程组. 使用一个变量记录当前子段和，并随时去除末项，求出并加入首项，这种可以避免反复求和，将时间复杂度优化到 $O(n)$，达到优化的极限（常数复杂度仍然可以优化）.

至此，子段和问题中的“连续 p 项和为正，连续 q 项和为负，求最长数列”问题宣告解决. 这个结论与最大公约数有关，是很漂亮的. 下面这道题的结论也是这样的.

（1992 加拿大训练，《组合构造》P129）一个主人正等着 7 个或 11 个孩子的到来，他准备了 77 个弹子作为礼物，并把这些弹子装在 n 个袋中，使得到来的孩子不管是 7 个还是 11 个，都可使每个孩子得到若干袋弹子，而每个孩子得到的弹子数目相等. 求 n 的最小值.

这道题的关键在于构造图论模型. 设弹子装进了 n 袋，这 n 袋可以分成 7 份，每份中的袋数不一定相等，但每份中的弹子总数相同，均为 11，记这 7 份为 $x_1,x_2,...,x_7$. 这 n 袋还可以分成 11 份，每份中的袋数不一定相等，但每份中的弹子总数相等，都是 7，记这 11 份为 $y_1,y_2,...,y_{11}$. 对 $1\le i\le 7, 1\le j\le 11$，若 $x_i\cap y_i\ne\varnothing$（有公共的袋），则将 x_i,y_j 之间连一条边，形成一个二分图.（这道题可以放在《二分图》专题中）

取二分图 G 的最大连通子图，不妨设 $|X'|=a,|Y'|=b$，考察任意一个袋，如果在 X' 中出现，则必在 Y' 中出现. 事实上，若此袋不出现在 Y' 中，则必出现在 $Y-Y'$ 中，于是 X' 与 Y' 外的顶点有边相连，与连通子图的最大性矛盾. 于是 X' 与 Y' 中的弹子数相等. 故 $11a=7b$，由于 $(11,7)=1$，总共只有 77 个弹子，故 $a=7,b=11$.

因此，整个二分图 G 是连通图. 由 G 的连通性，$||G||\ge|G|-1=7+11-1=17$. G 中的每一条边对应一个袋. 下证不同的边对应不同的袋.

假设两条边 x_iy_j, x_ky_l 对应同一个袋，则 a 既在 y_j 中，又在 y_k 中，与题意矛盾. 所以袋数 $\ge||G||\ge 17$.

这道题的结论是 11+7-1=17，原因正是(11, 7)=1. 如果这两个数不互质，问题就出现在 $11a=7b$ 的地方. 设这两个数为 p,q，且 $(p,q)=d$，则 $pa=qb$ 的最小正整数解即为 $a=\frac{q}{d},b=\frac{p}{d}$. 此时，整个图被分成 d 个连通子图. 对每个连通子图，上述结论仍然适用，再将各连通子图合并，因此 $||G||\ge p+q-d$.（每增加一个连通子图，边数的最小值减少 1，这意味着去掉了原子图中的一条边，将原连子图分为两部分.）

综上，上述“分弹子问题”的一般解为 $p+q-(p,q)$.

·搜索优化· 跳出局部最优的陷阱

(本讲适合信息学竞赛)

在搜索问题中,我们常常采取“局部搜索”的办法.局部搜索算法首先从问题的一个可能解出发,在该解的附近,找到使得目标函数值最大或最小的解,并用新解取代原来的解.重复以上过程,直到达到迭代次数上限,或无法得到更优的解.

局部搜索算法与经典搜索算法相比,有着速度快的优点,适合解决NP-Hard问题.但它的明显缺点就是,容易陷入“局部最优”的陷阱.局部最优的产生,是由于目标函数像一个山区,其中有很多座山,局部搜索会导致爬上最近的山头,而这个山头可能并不是山区的最高峰.因此,局部搜索算法得到解的优劣,很大程度上取决于初始解的选取.这显然是我们不愿意看到的.

有人或许说,取大量的初始解,对每个初始解应用局部最优算法,但这样做的效率低,还有随机性,不太可取.还有人说,扩大局部搜索的范围,对初始解周围的更大范围进行搜索.但这样做,与经典搜索无异.

可行的方案有两个:一是暂时接受较差的解,以退为进,这就是“模拟退火算法”.二是变换搜索空间,使得目标函数的极值点尽可能少,减少陷入局部最优的机会.

由于所有NP-Hard问题均可转化为SAT问题,为了方便描述,本文就此展开讨论.给定一组布尔变量$\{a_1,a_2,...,a_n\},a_i=0,1$.问布尔表达式 $f(a_1,a_2,...,a_n)$ 是否可满足?

定义目标函数 $f(A)=\sum u_i$,其中 A 是 $(a_1,a_2,...,a_n)$,u_i 是若干个形如 $a_k,1-a_k$ 的表达式之积.表达式可满足当且仅当存在 $f(A)=0$.

定义 B 是 A 的邻域,如果 A,B 的 n 个分量 a_i 中只有一个不同.本题中,就是分别修改每个 01 位.

1 加权

开始时每个 u_i 的权 p_i 为 1.当搜索达到局部最优(局部最小)时,对未达到 $u_i=0$ 的项,将其权值 p_i 加上 k.这时,重新计算目标函数 $f(A)=\sum p_i a_i$,继续算法.

加权算法对于各 u_i 分布不均匀的情况适用,它可以通过修改权值 p_i,自动找出 u_i 间隐藏的不对称性(不同的项,重要度不同),使得“地形图”改变模样,跳出局部最优.

2 种子杂交

设 A_0 为初始解,当第一次进入局部最优时,解为 A_1;下面将 A_0,A_1 进行杂交,作为新的初始解.具体地说,就是将 A_0,A_1 中相等的二进制位取原来值,不等的二进制位随机取值.再进行搜索,得到局部最优 A_2.再将 A_1,A_2 杂交.以此类推,一般的,将 A_i,A_{i+1} 进行杂交得到新解,以此为基础搜索,直到 $A_i=A_{i+1}$,当前最优已经是全局最优.

种子杂交策略的优点在于,在局部最优的基础上又增加了一次“搜索”,求得“最优中的最优”.此策略求得的解,由于是在较优解的基础上产生,吸收了共同的“优点”,会距离最优解越来越近,这是优于随机扰动算法的.上述算法也被称为“遗传算法”,利用生物进化的准则,在原有解的基础上随机突变,逐步淘汰劣解,优中选优.

3 模拟退火

模拟退火算法与局部搜索算法的最大区别在于,模拟退火可以在一定程度内接受“较差”的解,以免陷入局部最优.具体来说,搜索开始时,接受限度大,几乎所有产生的解都可以被接受;随着搜索过程的进行,接受限度逐渐减小,只能在较小的限度内按一定的概率使解变差.直到限度减小为0时,不再接受差解,此时达到的局部最优便可能是全局最优.

根据实践经验,模拟退火的接受限度 t_k 一般是指数变化的,即满足 $t_k=\alpha t_{k-1}$.其中 $\alpha<1,\alpha\to 1$.在第 k 次迭代时,如果现有解好于当前最优解,或比当前最优解差的程度不大于 $t_k\cdot p$,其中 p 是 $(0,1)$ 中的随机数,则接受现有解,继续搜索下一层.

4 按序行走

到达局部最优时,从未满足的 u_i 所含的变量中随机取出一个,将其值取反,此时这个 u_i 可以满足.如果仍然是局部最优,则继续修改当前未满足式中的其他变量,直到跳出局部最优,开始新一轮搜索.

由于每次按序行走,总有一个未满足的表达式得到满足,故此法类似于种子杂交,充分利用了原有解的信息,还跳出了局部最优的陷阱.

5 粒子群算法

粒子群算法是由鸟群捕食得到的启示,

有若干个粒子同时行动,追踪个体最优(粒子本身的最优值)和群体最优(整个算法的最优值),根据下式更新速度和位置:

$$v' = wv + c_1 r(p - f(v)) + c_2 r(g - f(v)),$$

$$f(v') = f(v) + v'.$$

其中 v 是当前状态,w 是惯性权重,f(v)是目标函数,p 是粒子最优,g 是全局最优, c_1, c_2 是两个参数,通常取为 2,r 是一个(0,1)的随机数.粒子群算法中,各粒子的行为是跟踪最优粒子的行动,从而使各粒子朝着最有可能是最优解的方向移动.

6 蚁群算法

模拟蚁群觅食的特征,设每只蚂蚁(搜索单元)每次只能移动一步,每走到一个位置,就在这个位置释放一些激素.蚂蚁有一定的惯性沿着原来的方向前进,同时尽可能向激素多的方向移动,并以一定的概率做出随机变化(这是蚂蚁的创新).

与粒子群算法不同,蚁群算法不能直接告诉每只蚂蚁当前的最优位置,而是告诉通往最优位置的途径(环境中的激素数量).较短的路径会在单位时间内走过更多的蚂蚁,留下更多的激素,形成一种正反馈.

蚁群算法适用于寻找最短路径类问题,成功的关键在于多样性(多只蚂蚁)避免了局部最优,反馈学习(跟随激素)保证了搜索的方向性.

上述遗传算法,粒子群算法和蚁群算法,都是模拟生物行为的人工智能算法,其核心是既不因循守旧(多个粒子,多种途径,一个失败不影响整体,也不会盲目跟随某个粒子),又不无拘无束(向着一定的方向逐步调整自身).这正是大自然凭借一套简单的法则进化出高级生命的秘诀.

7 平滑搜索空间

这种方法不同于前面的是,它针对的是目标函数极值点多的特点,要使得搜索空间“平滑”一些,减少局部最优.

具体来说,就是将原问题转化成一个问题序列,问题的难度依次递减,搜索空间越来越平滑.这样,从平滑的问题开始搜索,逐步逆推,最后得到最优解.

设 α 为“平滑指数”, α 越大,搜索空间越平滑,越不容易陷入极值点; $\alpha = 1$ 即为原问题.从一个适当的 α 出发,求解问题 (S_α, A_α) 得到局部最优解 A_α ,再以 A_α 为初始解,求解问题 $(S_{\alpha-1}, A_{\alpha-1})$ 得到局部最优解 $A_{\alpha-1}$,以此类推,直到原问题.

这种搜索算法由于需要设计不同阶段的问题 S_α ,可操作性很强,可以根据实际数据有针对性的设计算法,但难度很大.

·信息技术· 素数判定与攻击破译

2002年,3位印度的数学家震惊了世界,他们创造的素数判定新算法颠覆了传统.

```
Input: integer n>1
1. if ( n is the form of a^b, b>1) output Composite;
2. r = 2;
3. while (r<n) {
4. if (gcd(n,r)<>1) output Composite;
5. if (r is the prime)
6. let q be the largest factor of r-1;
7. if (q>= 4 * (r^(1/2)) * log(n)) and (n^((r-1)/q))) mod r <> 1)
8. break;
9. r:=r+1;
10. {
11. for a := 1 to 2*(r^(1/2))*log(n);
12.if ((x-a)^n mod n<>(x^n-a)) and ((x-a)^n mod (x^r -1)<>(x^n-a))output Composite;
13.output Prime;
```

他们的算法是将问题转化成关于待测试数的一系列小的方程.如果一个数满足所有等式,那么它就是一个素数.

当素数很大时,这种算法比先前的 Miller-Rabbin 算法效率高,而且是确定的多项式算法.这样简单的算法破解了世纪难题,使我们推想困难问题也许存在简单而巧妙的解答,这使得数学更加诱人.

最近又有媒体炒作,曾经找到 MD5 碰撞的山东大学王小云等人,破解了 RSA 算法,并给出了所谓“大数分解算法”.此算法所称的找到一个数使其与待分解数的最大公约数不为 1,也许是解决大数分解问题的一个途径,但网上描述的方法显然是不可行的.

但是,没有传统的大数分解算法,并不意味着无法破译密码.我们完全可以使用物理学,电子学,甚至心理学的知识解决.

1. 耗电量法

由于 RSA 算法计算 x^n 时,需要使用二分算法,分解成平方与乘法的序列,而这两种运算占用的 CPU 频率不同,进而可以通过耗电量的变化推导密码.

具体的说, $x^{25}=(((((x^2)x)^2)^2)^2)x$,可以表示为序列 SMSSSM,其中 S 表示平方,M 表示乘法.

考虑序列 SSMSMSSSSMSSM,从耗电量上看,所有的 M 看起来不同,每个紧跟在 M 之后的 S 也与前面的 M 不同.而所有的 S 看起来相同.如果我们能够找到这些相同的 S,就可以通过恢复出 MS 序列,得到私钥.攻击时,让计算机分别对 $x,-x$ 取幂 $\bmod n$,并使用特定的数据,就可以推断出相同 S 的数目.

2 声音法

采集计算机运算时的声音信号,进行频谱分析.由于风扇,硬盘等设备频率较低,而 CPU 运算产生的微小频率很高,对于每个乘法和平方,也可以使用类似的方法解密.

3 Cache 法

在运行加密之前先运行一段程序,映射到 Cache 中,执行 RSA 加密算法时,Cache 会加载算法中的一些数据,分析之后可以得到加密的参数.

4 返回信息分析

发送给加密服务器一些特别设计的信息,让对方进行数字签名.根据签名得到的信息和原始信息,就可以列出一个方程组,由于数据的特殊性,可以用较短的时间解出私钥.防范这一攻击的方法是,服务器不对任意给出的信息进行数字签名,给予签名的信息必须符合一定的格式,这样攻击者便没有办法利用数论分析得到私钥.

5 ICMP 洪水攻击

除了正当的分析方法,还有攻击方法.ICMP 就是 Internet Control Message Protocol,最常见的应用就是 ping 命令.

由于 ICMP 报文本身可以携带数据,而它拥有内核级别的处理权限,不受任何软件阻拦.更严重的是,ICMP 一般是加密传送的,管理员根本无法判断报文中是否含有木马,这样 ICMP 会在不知不觉中夺取整个计算机.

ICMP 洪水攻击,简单的说,就是不停的向被攻击计算机发送数据包,迫使对方作出响应,从而占满对方的网络资源.这一攻击的前提是,自己的计算机网络带宽大于被攻击计算机.为了实现这一目的,很多黑客选择使用占领的服务器代替自己的计算机.

或者采用伪造 IP 的手段,向多台服务器发送 ICMP 报文,这些服务器向待攻击服务器“回复”,这样多台服务器变成了反射 ICMP 的镜子,实现“替罪羊”的作用.

ICMP 洪水攻击难以防范.有人提出了“香蕉皮原理”:如果一个人同时给你一个香蕉和一个香蕉皮,是可以区分的;但是如果同时向你的身上倒一车香蕉皮,即使有区分能力也无济于事,你已经被香蕉皮淹没了.这就是洪水攻击的阴险之处.

6 溢出攻击

众所周知,操作系统分配给每个程序的内存数量是有限的.系统分配缓冲区后,攻击者挤入了超过限制的数据量,会导致系统启动保护机制,停止 RPC 服务,进而系统重新启动,但这样达不到入侵的目的.

研究者发现,并不是所有的溢出都会触发系统保护机制,有的特定代码甚至可以使溢出的程序执行特定的命令.这样,攻击者可以编写一段恰到好处的程序,使得在没有保护机制下的内存堆栈发生混乱,而 CPU 恰好把入侵者的程序当作是应该执行的命令,从而达到入侵的目的.

要阻止溢出攻击,唯一的办法就是完善系统保护机制,修复其中的漏洞,不让溢出导致内存混乱.但到底有多少个缓冲区可以发生溢出,又有多少种“奇特”的代码能够实现特殊目的呢?这些使得防范溢出攻击变得异常困难.

7 拒绝服务攻击

拒绝服务, Synchronize Denial of Service,简称 SYN.要理解 SYN 攻击,首先应该了解网络连接建立的过程.

1.计算机 A 向计算机 B 发送一个带有 SYN 标记的数据包,请求连接.

2.计算机 B 返回一个带有 SYN 和 ACK 标记的数据包给计算机 A.

3.计算机 A 再返回 ACK 标记的数据包给服务器 B,标志着连接建立.

问题就出在第三步“确认”.如果计算机 A 在发送 SYN 数据包后,断开了网络连接,计算机 B 由于收不到 ACK 标记,只能等待下去,拒绝其他连接请求.但这个等待时间很短,即使有一两台计算机出现故障,也不会导致正常网络连接中断.

但是,攻击者会使用伪造 IP 地址的手法,制造大量来自“空计算机”的 SYN 数据包,这样当然不会收到 ACK,服务器的时间都用在等待上面,无法收到其他正常用户的连接请求,于是发生了网络中断故障.

以上几种攻击手法,大都运用了伪装 IP,这事实上是 TCP 协议设计不规范,导致可能

由用户设置产生虚假 IP 酿成的大祸.

8 断电冷冻

众所周知,计算机内存 RAM 在断电后会很快丢失数据.但这个“很快”并不是瞬间,即使在常温下,也需要数秒到数十秒.如果对 RAM 进行低温处理,其中的数据甚至可以保存几分钟到几十分钟.

研究人员将 RAM 先降温到-50°C,使用一个 RAM 镜像软件启动计算机,对断电仍然保存数据的 RAM 进行读取和数据分析,从而找出计算机各项操作的密码.这对于经常离开所工作的电脑的人,是非常危险的.

从单纯数学方法的素数判定,到综合网络技术,物理学等多门学科的密码破译与攻击,一切都不再是那样简单.今后的信息安全研究,门类更加综合,任务更加艰巨.

·命题解题·

试毒酒问题

国王为 10 天后的生日宴会准备了 1000 桶酒,不幸的是,其中两桶被下了毒.为了确定其中的两桶毒酒,有人提议用死刑犯试毒.毒的潜伏期为 10 天.问:至少多少个死刑犯才能保证找到毒酒?方案如何实行?

最简单的方法就是,用 999 个人分别试验 1,2,⋯,999 桶酒,得到有毒的一桶或两桶;再根据共有两桶毒酒的条件,判断第 1000 桶是否有毒.这样显然太浪费了.

我们可以让一个人喝不同桶的毒酒,根据这些的组合判断毒酒.较为简单的一种办法就是,将 1024 桶酒(不足的用无毒酒补上)排成 32×32 的方阵,让 32 个人每人喝一行,32 个人每人喝一列,共有 63 条从左上到右下的对角线,每人喝一条.这样,根据两行两列被毒死的人确定出 4 个交点(矩形的 4 个顶点),再根据对角线即可判断是左上右下,还是右上左下.这样,共用 127 个人.

我们首先得出试毒酒问题的信息论下界.由于每个人死与不死只有两种情况,设使用 n 个人试验,共有 2^n 种情况.而两桶毒酒的组合,共有 C_{1000}^2 种情况.由于 $2^n > C_{1000}^2$,解得 $n \geq 19$.但是,这样的估计显然过于宽松,因为根本不可能做到死亡情况与毒酒的组合一一对应,而必然出现很多多对一和无对应的情况.

这个问题在百度数学,物理贴吧中均引起了激烈的讨论,至今没有讨论出正确答案.其中提到把 1000 桶毒酒排成 10×10×10 的立方体,每个人喝一个平面,共需 30 人.事实上根本不行,因为这 30 个平面中,对于两桶毒酒坐标各分量均不同的情况,每 10 个一组的面中,会选出 2 个面,这样形成了 8 个交点,共有 4 种可能,无法分辨.即使加上了对角线,仍然很多,每个方向至少 9 人,对角线上估计至少 20 人,总共在 45 人以上.

还有一种说法,是把 1000 桶 2 毒等价于 C_{1000}^2 桶 1 毒,这通过小数据就可以反驳.6 桶 2 毒如果等价于 15 桶 1 毒,对应到 2 进制,采用二分方法处理,就可以用 4 人解决问题;而 6 桶 2 毒是不能用 4 人解决的.

有人提出再用 4 个人喝对应的对角线就可以了,这忽略了“潜伏期 10 天”的规定.倘若没有这项规定,使用 2 个人就足够了:一个人依次试各桶毒酒,直到死亡试出第一桶;再换一个人从下一桶开始试,直到试出第二桶.这样需要的时间会很长.潜伏期规定的意思是,一次试验就可以确定两桶毒酒.

为了进一步讨论这个问题,我们将其数学化.将每桶毒酒看作一个元素,每个人所喝的毒酒看作一个集合,如果一次试验能够确定两桶毒酒,就不能有两个集合的并集相同(否则这两种毒酒方案均可选择).

首先证明 6 桶 2 毒不能用 4 人解决.4 个人,可以产生 16 种结果,除去全部不中毒的一种,共 15 种.6 桶 2 毒共有 15 种组合,故不能出现无效的判断组合.

如果出现两个集合相同,两种组合产生了相同的结果,出现浪费,不可行.在 15 种结果中,有 4 种死 1 人,不妨设 1 号死.由于两桶酒 AB 全部集中到这一个人死,故剩下的 3 个人对应的必须是那 4 桶无毒的酒 CDEF,否则会有人中毒.再考虑 AC 有毒的情况,即使剩下的 3 个人能够判断 C 有毒,AB 两桶因为或者同时被喝,或者同时不被喝,它们无法区分哪桶有毒,不可行.因此必然出现浪费,即两种死亡序列对应相同的毒酒,或者某种死亡序列不可能出现.

对于集合 $\{1,2,\ldots,n\}$,找到最大的 $f(n)$,使得存在 $f(n)$ 个不同子集 $A_1,\ldots,A_{f(n)}$,对于任意四个不同子集 A_i,A_j,A_k,A_l,满足 $A_i \cup A_j \neq A_k \cup A_l$.原问题即为找到最小的 n,使得 $f(n) \geq 1000$.

定理 $f(4n) \geq 2^n$.

将$4n$个元素分为 4 个 n 元互不相交的子集 X,X',Y,Y', 将2^n 个集合的元素所属情况的 n 元 01 数组分为 $2^X,2^{X'},2^Y,2^{Y'}$, 构成一一映射, 分别为 g,g',h,h', 令1表示$(1,1,\dots,1)$, 定义子集族
$A=\{g(a)\cup g'(1-a)\cup h(a^3)\cup h(1-a^3)\}$, 其中 a 是任意一个表示集合元素所属情况的 n 元 01 数组.

下面证明, 子集族 A 是满足题意的. 假设 a,b,c,d 不满足题意, 则
$g(a)\cup g(b)=g'(c)\cup g'(d)$, 同理
$g(a^3)\cup g(1-a^3)=g'(b^3)\cup g'(1-b^3)$. 故 $a+b=c+d$, 且 $a^3+b^3=c^3+d^3$. 由于 $a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$, 有 $ab=cd$. 故 $(a,b),(c,d)$ 分别是 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 的两根, 与 $(a,b)\neq(c,d)$ 矛盾. 证毕.

现在我们已经实现了 40 个人. 如果要更少, 就需要更深入的讨论并集的关系. 预计最小数目在35左右, 这样的构造一定需要某种理论, 并使用计算机搜索. 目前笔者尚没有想法, 欢迎讨论.

·命题解题·

稍纵即逝的机会

现有 n 个随机的正整数依次出现在你的面前. 当每个数出现在你面前时, 你可以选择或放弃. 一旦选择, 不可更改; 如果放弃, 则不可返回重新选择. 若前 $n-1$个均未选择, 则必须选择第 n 个. 设计一种方案, 使得选中最大数的可能性尽可能大.

一个自然而简单的方法是, 对于前 u 个数不选择. 从第 $u+1$个数开始, 一旦出现比前 u 个数都大的, 立即选择.

我们的目标是找到合适的 u . 取 $u=\dfrac{n}{e}$, 其中 e 是自然对数的底. 此时, 有 $\dfrac{1}{e}$ 的机会选到最大的数.

下面证明, $1/e$ 的概率是最大的.

令 u 为满足 $\sum_{i=p}^{n}\dfrac{1}{i}\le 1$的最大数, A_n 表示 $\{1,2,\dots,n\}$ 的所有排列的集合. 对于两个排列 $a\in A_\alpha, b\in A_\beta$, 如果 $\alpha\le\beta$, $a_i<a_j \Leftrightarrow b_i<b_j$, 则称 $a\le b$. 对于 $a\in A_n$, 令 $A_k(a)$ 表示所有 $\le a$ 的排列.

因为任何随机规则的期望都不大于确定规则的期望的最大值(随机规则是确定规则的一种分布), 只需要考虑确定的规则.

这种规则逐个检查排列, 决定停止的位置. 当这个程序检查到排列 a 的第 k 项时, 只知道 $F_k(a)$. 假设 $S_k\in A_k$ 使得程序终止, 令 $s_k=|S_k|$, 显然 $a\in S_k$ 满足 $a_k=k$.

对于任一个 $a\in S_k$, 共有 $\dfrac{n!}{k!}$ 个大于 a 的排列. 其中由于 $\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!}$ 个排列成功取到了最大数 n. 因此成功的概率是

$$P=\frac{1}{n!}\sum\frac{(n-1)!}{(k-1)!}s_k .$$

显然, S_k 是无序的, 对于任意 $i<j$, $a\in S_i, b\in S_j$, $a\ge b$. 不然, 当处理到排列 b 时, 程序会在 i 位置停下, $b\notin S_j$.

因此, 对任意 i,
$\sum_{j=1}^{i-1}s_j\dfrac{(i-1)!}{j!}+s_i\le(i-1)!$. 令 $t_i=\dfrac{s_i}{i!}$, u 是使得 $\sum_i=u^{n-1}\dfrac{1}{i}\le 1$ 的最大数, 则对任意 i, 有 $\sum_{j=1}^{i-1}t_j+it_i\le 1$.

$$\text{故 } P=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kt_k$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{i=u}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}t_j+it_i\Big)\Big(1-\sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{i}\Big)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=u}^{n}\Big(1-\sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{i}\Big)=\frac{u}{n}\sum_{i=u}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

等号取到当且仅当程序忽略前 u 个数, 而在第一个大于前 u 个的数时停止.

根据 u 的定义, 由于 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}=\ln n$, $\sum_{i=1}^{n/e}\dfrac{1}{i}=\ln n-1$, $\sum_{i=n/e}^{n}\dfrac{1}{i}=1$, 故 $u\le\dfrac{n}{e}$.

这个问题给我们一些启示, 直接选择或

过分等待都是不明智的. 暂时观望, 然后针对后续数据作出决策, 才能取得良好的效果. 有趣的是, 这个问题与奇妙的 e 有关.

·问题新解·

转动的开关

一本英文数学竞赛书上有这样一道题, 某人在一张正方形的鼓上玩游戏, 鼓的每个顶点有一个开关, 他每次可以把手伸进顶点的一个或两个孔中(眼睛看不到内部), 选择改变开关的状态, 之后鼓会快速旋转, 操作者无法看清. 一旦所有开关变成相同状态, 游戏者获胜. 试问: 是否存在必胜策略?

答案是可行的.

1. 将任一条对角线改变状态
2. 将任一条边改变状态
3. 将任一条对角线改变状态
4. 将任一个开关改变状态
5. 将任一条对角线改变状态
6. 将任一条边改变状态
7. 将任一条对角线改变状态

上述 7 个步骤, 中心对称, 前三步解决偶数个开关闭合的情况, 第四步将奇偶性转换, 后四步处理奇数个开关闭合的情况.

有趣的是, 虽然看不见初始状态, 也不知道两次操作的开关是否相同, 但我们始终能够保证操作后状态相同.

我们对这个问题进行推广. 设这个鼓是正 n 边形的, n 个开关分别在 n 个顶点上. 每次旋转的角度是 360/n 的倍数. 游戏者每次可以改变任意多个开关的状态. 仍然是所有开关状态相同获胜. 此时是否存在必胜策略?

首先用数学归纳法证明, 当 $n=2^k$ 时, 存在必胜策略. $k=2$ 的情形已经证明.

假设 $n=2^k$ 时存在必胜策略.

(1) 若任意中心对称的两个开关状态均相同, 则将对角线上的开关看作一个整体同时操作, 转化成 $n=2^{k-1}$ 的情形.

(2) 若任意中心对称的两个开关状态同时相同或同时相反, 首先递归调用(1), 如果开关状态相同, 问题解决; 否则, 调用(1)可能交换了两个中心对称的开关的状态, 因此仍然满足任意中心对称的开关状态相反. 此时, 改变连续的 2^{k-1} 个开关的状态, 就可以转化成(1)的情况.

(3) 对于一般的情况, 对任意连续的 2^{k-1} 个开关递归使用 $n=2^{k-1}$ 的方法. 对于每对中心对称的开关, 每次 $n=2^{k-1}$ 的操作至多作用于其中的一个上. 由于 $n=2^{k-1}$ 的操作过程中会出现所有对称开关状态的异或值之和(由 0 到 2^{k-1}, 每次只变化 1), 故操作过程中必有一个状态, 使得 2^k 个开关中所有的中心对称的开关状态相同或相反, 满足(2)的条件. 由于这样的状态可能在操作过程中的任何时刻出现, 我们在每次 $n=2^{k-1}$ 的操作之后, 都要执行一次(2)操作, 以确保不会错过机会. 另外, (2)操作不会影响之后的 $n=2^{k-1}$ 操作, 因此这样的方案是可行的.

其次证明, n 为奇数时, 不存在必胜策略. 假设游戏者策略的最后一步是对集合 A 中的开关改变状态. 由于无论如何旋转, 按照这个集合都可以翻转到相同状态, 故对于任何旋转顶点数 $i=1,2,\ldots,n$ 和任何一个开关 $j\in A$, 都满足 $j+i\in A$, 或都满足 $j+i\notin A$ (下标 $\bmod n$ 考虑). 显然, 集合 A 必须是多边形的所有奇数顶点或偶数顶点, 此时多边形的边数 n 必须是偶数, 矛盾.

最后证明, n 不是 2 的次幂时, 不存在必胜策略. 不然, 假设 $n=2^k p$, 其中 p 为大于 1 的奇数, 将所有开关分为 p 组, 每组由连续的 2^k 个开关组成. 构造这样一种初始情况, 每组内硬币的状态是组内所有硬币状态的异或和, 假设存在一个必胜策略, 则对于上述构造的游戏, 也一定可以取胜; 但将每个组看作一个整体, 共有奇数组, 根据前面的讨论没有必胜策略, 矛盾.

综上所述, 当且仅当开关数 $n=2^k$ 时, 存在必胜策略.

·格言·　人生是十分，三分是不可及的理想，三分是不争的事实，三分是无所畏惧的追求，一分是偶尔的忐忑不安、消极颓废。

世界上只有两种动物能够到达金字塔的顶端，一种是雄鹰，一种是蚂蚁。

对于最有能力的领航人，风浪总是格外汹涌。

·命题解题·

加油问题的讨论

1 油不能在沙漠中存放

有 n 辆卡车进入沙漠探险, 每辆卡车携带燃油的数量是一定的, 每辆卡车只能出发和返回一次, 卡车之间可以互相加油. 问这些卡车最多能够行进多远距离?(当然必须返回出发点)

对于 2 辆卡车的情况, 设每辆卡车装满油能行驶的路程是 L, 则卡车 A 前进到 $\frac{L}{3}$ 位置处, 将 $\frac{L}{3}$ 的油给卡车 B, 此时卡车 A 剩下 $\frac{L}{3}$ 的油恰好返回, 而卡车 B 此时满载, 最远可以到达 $\frac{2}{3}L$ 的地方.

当卡车数为 3 时, 多数人可能想两辆辅助卡车到达某处, 给第三辆加油;或者 A 给 BC 加油, B 再给 C 加油. 但这些都不是最优方案. 应该是最远的卡车返回时, 由其他卡车接应. 即 AB 同时出发, 到达 $L/3$ 时 B 将 $L/3$ 的油加给 A, 自己返回;A 再前进 $L/2$, 返回 $L/2$, 此时油耗尽. 派卡车 C 给 A 补充 $L/3$ 的油, BC 一起回到出发点. 这样, 卡车 A 到达的最远距离是 $\frac{5}{6}L.$

下面我们给出当 n 较大时, 路程 $f(n)$ 的下界. $f(n)\ge\frac{1}{3\ln 3}\ln n$.

用数学归纳法证明, 当 $n=1$ 时显然成立. 假设当 $n<k$ 时, 结论都成立.

当 $n=k$ 时, 由归纳假设, 存在 $k/3$ 的加油方案, 使得最大距离不小于 $\frac{L}{3\ln 3}\ln\frac{k}{3}$. 下面构造 k 的加油方案. 对于 $k-1$ 的加油方案中, 每次需要出发一辆卡车时, 在 $L/3$ 时刻出发两辆卡车, 前进到 $L/3$ 位置, 将其中一辆车加满油, 到达 $L/2$ 的位置, 另一辆卡车回到原地. 当这辆车到达目的地, 返回 $L/2$, 在回到原地前的 $L/3$ 时刻, 出发第三辆卡车, 仍然恰好将刚刚耗尽油的卡车接回原地. 对于所有行进较远位置的卡车, 根据归纳假设继续进行.

为了将归纳假设中的 $k/3$ 辆卡车送到 $L/3$ 处的"出发点", 每辆卡车需要另外两辆卡车为其加油, 共需要 k 辆卡车.

因此,

$$f(k)\ge\frac{L}{3\ln 3}\ln\frac{k}{3}+\frac{L}{3}=\frac{L}{2\ln 3}\ln k.$$

下面讨论路程 $f(n)$ 的上界.

$$f(n)\le 1+\frac{1}{2}\ln n.$$

假设最远的卡车可以到达 $f(n)$, 对于出发点到终点的路程中的任意位置 x (表示离开出发点的距离), 用 $g(x)$ 表示从位置 x 到达终点 $f(n)$ 的耗油量. 考虑距离 x 一个小量 Δ 处的耗油量 $g(x-\Delta)$.

因为 $g(x)$ 处的油需要经过 $x-\Delta$ 才能到达 Δ, 为了运送这些油, 至少需要在 $x-\Delta$ 与 x 之间往返运送 $g(x)$ 次(每辆卡车只能装载 1 单位的油), 故至少消耗 $g(x)\cdot 2\Delta$ 的油. 所以 $g(x-\Delta)\ge g(x)+g(x)\cdot 2\Delta$.

将出发点与位置 $f(n)-1$ 之间 N 等分, 并记 $\Delta=\frac{f(n)-1}{N}$. 由上式,

$$g(f(n)-\Delta)\ge(2\Delta+1)g(f(n))$$
$$g(f(n)-2\Delta)\ge(2\Delta+1)g(f(n)-\Delta)$$
$$g(f(n)-3\Delta)\ge(2\Delta+1)g(f(n)-2\Delta)$$
……
$$g(1)=g(f(n)-N\Delta)$$
$$\ge(2\Delta+1)g(f(n)-(N+1)\Delta).$$

上述 n 个不等式两边相乘, 得到 $g(1)\ge(2\Delta+1)^N g(f(n))$. 注意到 $g(1)\le n$, $g(f(n))\ge 1$, 故

$$n\ge(2\Delta+1)^N=(2\Delta+1)^{\frac{f(n)-1}{\Delta}}.$$

两端取对数得,

$$f(n)\le 1+\frac{\Delta}{\ln(2\Delta+1)}\ln n.$$

由于 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\Delta}{\ln(2\Delta+1)}=\frac{1}{2}$, 上式对任意小的 Δ 都成立, 故 $f(n)\le 1+\frac{1}{2}\ln n.$

综上所述, $f(n)=O(\ln n)$. 进一步的, 当 $n\to\infty$ 时, 可以构造方案, 使得

$$f(n)\to\frac{1}{2}\ln n.$$

2 油可以在沙漠中存放

与上个问题不同的是, 只有一辆卡车, 需要自己在沙漠中建立储油点.

为了保证解的最优性，必须使得在沙漠中存放一部分油后，剩下的油刚好返回上一个储油点．因此每个储油点的油量必须是卡车最大油量的整数倍．可以依次建造多个储油点，下一个储油点建成时，上一个储油点的油恰好用完．

本题采用倒推法．对于每个储油点的油，需要平均分成三份，一份到达下一个储油点，一份储存在下一个储油点，一份从下一个储油点返回．

因此，设卡车的油量为 L，第一个储油点距离为 $L/3$，第二个储油点距离为 $L/5$，以此类推．一般的，第 n 个储油点距离为 $\frac{L}{2n+1}$，需要往返共计 $2n+1$ 次（最后一次离开储油点，不需要再返回，因此是奇数）．

因此，如果要将卡车送往第 n 个储油点，需要汽油 $h(n)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n+1}$ 个卡车的满载油量，即

$$h(n)=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+...$$
$$=1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...)+C$$
$$=\frac{1}{2}(\ln n+c)+\frac{1}{2}+C$$
$$=O(\ln n).$$

其中 C 是小于 1 的级数和 $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+...$，$c$ 是欧拉常数．特别的，当 $n\to\infty$ 时，$h(n)\to\frac{1}{2}\ln n$．

由此，我们发现，无论是否允许将油放在沙漠中，总耗油量都是接近 $\frac{1}{2}\ln n$ 的．究其原因，就是调和级数求和．而调和级数产生的原因，在于每级储油点或者增援车辆的规模，都成公比为 3 的等比数列变化，导致上述两个结果十分相似．

事实上，上述两个问题本质上是相同的．对于沙漠中的储油点，是卡车在早先时间存储上，之后再用的．完全可以看成，若干辆卡车同时出发，一部分卡车走到一定的位置停下，充当储油点的功能．

例如，对于 3 辆卡车的情况，改为储油点问题，首先往返共 5 次，向距离为 1/3 处的储油点供油 1 单位，然后从此处出发，前进 1/2 单位，再返回，最后用上储存点剩下的 1/3 单位油．总距离为 5/6 单位，相同．

由于储油点问题是由耗油量衡量，而多卡车问题是由卡车数衡量，最优方案中没有浪费，因此走过的总路程是相同的．在储油点问题中，每次向下一个储油点运油的往返，可以看做是若干辆卡车完成的．最终到达目标的一辆卡车，可以拆分成两辆看，一辆从储油点出发到达终点，另一辆从起点或上级储油点出发负责运油，这样两个问题获得了统一，最优渐进距离 $\frac{1}{2}\ln n$ 是正确的．

·信息讲座·　二分答案法解最优化问题

（本讲适合信息学竞赛）

在信息学竞赛中，很多问题不能直接判断答案的最优值，而需要枚举答案，判断这个答案是否可行．这类问题的目标函数往往具有单调性，即最优值一侧的都不可能，而另一侧都可能．这样，类似于有序线性表查找，我们对当前答案进行二分枚举，从而找到符合条件的最优值．

例 1 摔鸡蛋问题

鸡蛋有一定的强度，即从某一层楼的高度摔下就会摔碎．使用最少的试验次数，确定鸡蛋的强度．

首先从楼高的一半开始试验，如果摔碎了，就从较低的一半实验；如果没有摔碎，就从较高的一半实验．二分递归，直到楼层数为 1，确定强度．复杂度 $O(\log n)$．

例 2 Accelerator（POJ 3232）

这道题也是简单的二分枚举答案，然后看是否能跑下来即可．

例 3 分石子问题

有 N 个石子，每个石子有给定的重量 w[i]，将它们装进 M 个筐中，使得最重的筐子尽量轻．

显然，本题可用动态规划算法解决．二维状态转移数组 f[i, j] 表示前 i 个石子装入 j 个筐子的最优值．则有状态转移方程

$$f(i,j)=\min\max\{f(k,j-1),$$
$$\max w(k+1,i)\},1\le j\le k$$

其中 $\max w(k+1,i)$ 表示 k+1 到 i 的石子重

量的最大值,这个数组可以预处理出来.

这个算法的时间复杂度是 $O(n^3)$,不理想.要进行优化,必须使用其他方法:二分答案.既然要求最重的筐子尽量轻,就限定筐子的重量最大值,找到最小的可行重量即可.这个判定问题用贪心算法即可解决.

只要按顺序将各石子往筐里放,只要放入后筐的总重量不超过限制.若超过限制,则放入下一个筐,如果某时刻筐数超过了 M,失败退出;否则这就是一个可行解.

以所有石子的重量之和为上界 P,以 0 为最小值,对这个区间递归二分查找.若当前区间为[a,b],对中值 mid=(a+b)/2 判断,若可行,则缩小到[a-1,mid],否则到[mid+1,b].

时间复杂度,由于二分是 log 级的,而每次贪心算法是 O(n)级的,总时间复杂度为 $O(n\log p)$.

(由于篇幅限制,下期待续)

·命题解题· 矩阵取数问题

矩阵取数问题,是在一个 $n\times n$ 的正整数矩阵中,选择互不同行,互不同列的 n 个数,使得选出的数之和最小.

很多人通常采用搜索算法,但无论如何优化,都是低效的.现在我们介绍此类问题的“匈牙利解法”.

1.把各行元素分别减去本行元素的最小值,再把每列元素分别减去本列中的最小值.此时每行,每列中必然存在 0 元素.

2.逐行判断,若各行都不止一个 0 元素,则将矩阵旋转 90°(行列调换).

3.若某行只有一个 0 元素,把该 0 元素标记为 a,把该 0 所在的列中的其余 0 元素标记为 b.把所有只含有一个 0 元素的行处理完毕后,再从头开始处理含有不少于 2 个 0 元素的行:任选一个 0 做 a 标记,再把该 0 所在行中的其余 0 元素及所在列中的其余 0 元素都标记为 b.

4.若标记为 a 的元素数等于矩阵阶数,则已经得到最优解.若小于矩阵阶数,则继续以下步骤:

(1)对没有标记 a 的行作标记 c

(2)在已作标记 c 的行中,对标记 b 所在列作标记 c

(3)在已作标记 c 的列中,对标记 a 所在的行作标记 c

(4)对有标记 c 的行,没有标记 c 的列中的所有元素作标记 d

5.在有标记 d 的所有元素中找出一个最小元素.若有 d 的行数大于列数,将有 d 的行中所有元素都减去这个数.否则,按列减.

6.这样必然出现负元素,所以对负元素所在列中各元素都加上最小元素以消除负数.返回步骤 2.

重复上述操作,直到找出最优解.

算法的正确性是显然的,因为矩阵的某一行或某一列同时加上(减去)相同的数,最优解的位置不变.算法的目的就是对矩阵进行变换,直到存在互不同行同列的 n 个 0.

·组合构造· 无和子集的个数

Schur 定理 设集合 $M=\{1,2,\dots,n\}$ 被分为 t 个互不相交的子集 $M_1,M_2,\dots,M_t$.证明:若 $n\ge[t!\cdot e]$,则至少存在一个子集中的三个元素 x_i,x_j,x_k 满足 $x_i=x_j+x_k$.

证明 应用下述的 Ramsey 定理(证略)

令 $a_1,a_2,\dots,a_k$ 是正整数,则存在一个最小的正整数 $n=R_k(a_1,\dots,a_k)$ 使得对任意 K_n 完全图的 k 染色,都存在一个下标 $i,1\le i\le k$ 和一个各边同色的 K_n 的完全子图 K_{a_i}.

引理 $R_t(3,\dots,3)\le[t!\cdot e]+1$.

证明 用数学归纳法.当 $t=2$ 时,我们证明 $R_2(3,3)=6$.一方面,对于 K_6 的某个顶点连出的 5 条边,由抽屉原理,至少有 3 条边同色.若这 3 条边中的任意一条也同色,则存在同色三角形;否则,这三条边形成同色三角形.另一方面,对于 K_5,构造五边形的边为红色,对角线为蓝色,则不存在同色三角形.故 $t=2$ 满足条件.

假设结论对某个 $t\ge2$ 成立.令

$n=[t!\cdot e]$, 我们证明结论对 $k+1$ 也成立. 令 $m=[(t+1)!\cdot e]+1$. K_m 的每个顶点的度均为 $m-1$, 又因为

$m-1=[(t+1)!\cdot e]=1+(t+1)[t!\cdot e]$

$=1+(t+1)n$

故 K_m 的任意顶点至少有 $n+1$ 条同色线段与之相连, 不妨设为 $t+1$ 色. 考虑由 $n+1$ 个顶点构成的完全图 G. 如果这个图中的两点 A,B 也由 $t+1$ 色的线段相连, 则 A,B,V 构成一个同色三角形. 否则, G 中的所有边由 t 种颜色构成. 既然 G 有 $n+1=[t!\cdot e]+1$ 条边, 由归纳假设, 存在一个同色三角形. 由归纳法, K_m 是同色三角形, 因此

$R_{t+1}(3,...,3)\le[(t+1)!e]+1$. 引理得证.

回到原题. 令 $n=[t!\cdot e]$. 考虑 K_{n+1}, 若 $|i-j|\in M_k$, 则将边 (i,j) 染上颜色 k. 由引理, $R_t(3,...,3)\le[t!\cdot e+1]=n+1$. 因此 K_{n+1} 中有一个同色三角形. 令 $x<y<z$ 为这个同色三角形的三个顶点, 则 $y-x,z-x,z-y$ 在同一个集合 M_i 中. 又因为 $(y-x)+(z-y)=(z-x)$, 命题得证.

通过网络搜索, 笔者又找到了一种利用高等数学中的泰勒级数证明的方法.

考虑函数 $f(x)=e^x$, 展开式为

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+...$$

因此

$$t!\cdot e=t!(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{t!})+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)(t+2)}+...$$

注意到, 对于 $t\ge 2$,

$$\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)(t+2)}+...<\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t+1)^3}+...=-1+\frac{1}{1-\frac{1}{t+1}}=\frac{1}{t}.$$

因此

$$S_t=[t!\cdot e]=t!(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{t!})$$

容易证明, 序列 $(S_t)_{t\ge 0}$ 满足递推公式

$$S_t=tS_{t-1}+1$$

对于 $t\ge 1$, 并定义 $S_0=1$.

现在我们处理原问题. 假设没有一个子集包含三个元素 a,b,c 满足 $a+b=c$. 由递推关系知, $t\nmid S_t$. 又根据抽屉原理, 存在一个子集至少有 $[\frac{S_t}{t}]+1=S_{t-1}+1$ 个元素. 记这个子集为 $M_1=\{x_1,x_2,...,x_k\}$, 使得 $x_1<...<x_k$, 且 $k\ge S_{t-1}+1$. 考虑集合 $Y=\{y_1,...,y_{k-1}\}$, 其中 $y_i=x_{i+1}-x_1$. 显然, $|Y|=k-1\ge S_{t-1}$. 没有 Y 的元素在 M_1 中. (否则, 若 $y_i\in M_1$, 则 $y_i+x_1=x_{i+1}$, 矛盾) 因此 Y 的所有元素都在剩下的 $t-1$ 个子集中.

同理, 存在一个子集有至少 $\left[\frac{k-1}{t-1}\right]+1\ge\left[\frac{S_{t-1}-1}{t-1}\right]+1=S_{t-2}+1$ 个 Y 的元素. 不妨设这个子集是 M_2. 则 $M_2=\{y_1,...,y_s\}=\{x_2-x_1,...,x_{s+1}-x_1\}$, 其中 $s\ge S_{t-2}+1$. 因为 $y_i-y_1=x_{i+1}-x_2$, 我们得到 $y_i-y_1\notin M_1\cup M_2$. 令

$Z=\{y_2-y_1,...,y_s-y_1\}$

$=\{x_3-x_2,x_4-x_2,...,x_{s+1}-x_2\}$.

则 $|Z|\ge S_{t-2}$ 个元素都在剩下的 $t-2$ 个子集中. 由归纳法知, 存在一个至少 $S_{t-i}+1$ 个元素的子集

$M_i=\{x_i-x_{i-1},x_{i+1}-x_{i-1},...\}$

$=\{y_{i-1}-y_{i-2},y_i-y_{i-2},...\}$

这样, 子集 M_i 中任意两个元素之差, 就是 $M_1,...,M_{i-1}$ 中两个元素之差. 另外, 对于任意 $j<i$, 存在一个 $z\in M_j$ 使得对任意 $c\in M_i$, 都有一个 $d\in M_j$ 满足 $c=d-z$.

最后, 集合 M_t 含有至少 $S_0+1=2$ 个元素. 不妨设 $M_t=\{a,b\}$, 且 $a<b$. 则数 $b-a$ 必在子集 $M_1,...,M_{t-1}$ 之一中. 不妨设 $b-a\in M_1$. 但数 b,a 又在集合 M_j 的构造中以 z_m-z_k 和 z_n-z_k 的形式出现, 其中 $z_m,z_n,z_k\in M_i$. 而 $(b-a)+z_n$ $=(z_m-z_k)-(z_n-z_k)+z_n=z_m$, 矛盾.

根据 Schur 定理, 无和子集的个数是有上界的. 那么集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的无和子集个数的最大值到底是多少呢?我们把这个最小值称为 Schur 数, 用 $S(n)$ 表示. 我们已经知道 $S(1)=1$, $S(2)=4$, $S(3)=13$, $S(4)=44$. 当 n 较大时, 本文给出的 $S(n)\le[n!\cdot e]-1$ 已经很好, 而 $S(n)$ 更加紧凑的上界仍然在研究中.

· 竞赛之窗 ·

IMO2009 国家队测试题

第一套

1. Given integer $n>1$, we can construct such integer sequence $a_1,a_2,\ldots$ such that $a_1=\varphi(n), a_{i+1}=\varphi(a_i), i=2,3\ldots$, where φ is the Euler function.
Let k be the smallest positive integer such that $a_k=1$. If $n=a_1+a_2+\ldots+a_k$, we call n a perfect Euler number. Prove: for prime $p\ge 7$, $3p$ is a perfect Euler number if and only if $\frac{p-1}{4}$ is a perfect Euler number.

2. In interval $[1,2009]$, select a integer n randomly, this number is unknown to you. Your task is to find n in least guesses. In each guess, you must guess a possible value of n in the known conditions. After each guess, you will be told the relation between your number and n (small, equal or large). You will win if you ask odd times. With the best strategy that makes the guesses least, what's the probabbility that you win?

3. Given n colors $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Given integers $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge 1$. Find the minimum integer $m=f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, such that no matter how to color the edges of graph K_m with such n colors, there always exist an $1\le i\le n$, such that there are a_i separate edges in color A_i. (Here separate means any two edges have no common vertex.)

4. In ABCD, $\angle ABC=\angle ADC=135^\circ$, point M,N are on lines AB,AD respectively, such that $\angle MCD=\angle NCB=90^\circ$. Let K be the intersect point of the circumcircle of triangle ABD and the circumcircle of triangle AMN. Prove: $AK\perp KC$.

5. On a plane, given a finite set X of not less than 9 points, and a triangle ABC. Any 9 points covered by the edges of two translation triangles of ABC. Prove: X can be covered by the edges of two translation triangles of ABC.
(Translation triangle is congruent with ABC and their corresponding sides parallel.)

6. Given sequence $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ of rational numbers, $P(x)$ is a polygonmial with rational coefficients, and for any positive integer n, we have $P(q_{n+1})=q_n$. Prove: $\{q_n\}$ is a periodic sequence.

第二套

1. Let I and O be the inner center and circumcenter of triangle ABC. The escribed circle ω_A of triangle ABC is tangent to lines AB,BC,CA at points K,M,N respectively. If the midpoint P of KM is on the circumcircle of triangle ABC, prove: points O,I,N are collinear.

2. Given two different rational numbers a,b, and there exist infinite positive integers n, such that a^n-b^n is an integer. Prove: a,b are both integers.

3. Given $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2\cos\frac{2\pi}{n}-1}}$, real numbers $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[\frac{1}{a_n},a_n]$. Prove:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}\ge\frac{n}{2}.$$

4. Find the maximum real number k such that: For any three integral points A,B,C on a coordinate plane, if $(|AB|+|BC|)^2<8S_{\triangle ABC}+k$, then A,B,C must be three vertices of a isosceles triangle.
(Hint: On a coordinate plane, a point with its x and y coordinate both integer, is called a integral point).

5. Let n be a positive integer, $P(z)$ be an n -order polygonmial with complex coefficients

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0.$$

The modules of its roots are all 1. Prove: The modules of roots for polygonmial

$$Q(z)=na_nz^n+(n-2)a_{n-1}z^{n-1}+\dots$$
$$+(2-n)a_1z+(-n)a_0$$

are also all 1.

6. Set $A\subseteq\{1,2,\dots,100\}$, for any three different elements a,b,c in A, bc is not multiple of a. Find the maximum $|A|$.

(未完待续)

·网络技术·

GFW屏蔽原理初探

众所周知,我国政府为屏蔽不良信息,净化网络环境,建立了规模庞大的内容过滤系统,通常称为Great Firewall,简称GFW.面对网络上种类繁多,层出不穷的“不良信息”,GFW会如何应对?效果又如何?

1 DNS劫持:最经典而最常用

我们访问一个网站时,需要将网站的域名转化成可识别的IP地址.提供这一服务的计算机是DNS(Domain Name System).DNS劫持,就是人为修改国内DNS服务器的数据库,使得返回的IP地址指向无效主机,使用户无法建立真实的连接.

由于部分用户通过国外的DNS服务器(如OpenDNS)得到IP,GFW采用拦截这样的请求,并随机回应虚假IP地址的方法.因此使用国外DNS访问敏感网站时会出现几次得到的IP不同的现象.

此方法的优点是针对性强,不会伤害同一服务器的其他网站;缺点是如果通过某种途径直接得到IP地址,就无法拦截.例如刚刚屏蔽的网站,如果原来计算机曾经访问过,就可以调用DNS缓存,得到真实的IP地址.

通过刷新缓存,也可以获取最新的IP地址,访问IP发生改变或刚刚被解封的网站.尤其是规模小,空间不稳定的网站,所在服务器的IP地址常常发生改变,flushdns命令是常用的解决手段.

2 IP黑名单:滥杀无辜的祸首

这种方法是将一定的IP地址写入黑名单,一旦发现指向特定黑名单的数据包,就立即将其丢弃,达到中断连接的目的.

我们首先了解一下我国网络查询IP的路径.tracert结果的第一行是本机所在路由器的IP地址,第二行到第四行一般是本城市或本省的逐级汇总路由器.如果发现所寻找的IP在本省内,就直接跳转到对应城市的路由器,再逐级向下连接到对应的主机.否则,就通过一个本省的骨干DNS,将连接请求进一步上报到国家骨干网,例如网通的骨干机房是219.158.*.*.国家骨干机房如果发现查询的IP地址在国内,就将这个请求转给所在省的DNS.否则,就要将查询转向国家网络边界,通过信息审查之后,到达外国的服务器,继续在国外的查询请求.在国家骨干机房经过的服务器数,从1个到4个不等,但到达外国的连接请求都至少经过2个.

利用tracert命令可以发现,当准备连接在屏蔽地址列表中的计算机时,基本上都是在相同的路由器网络节点中断.这样的IP位置很可能是GFW的过滤器,一般位于各大网络系统的骨干机房.

这种方法的优点是操作简单,几乎所有的路由器都有限制IP地址的功能.但缺点十分明显,一是网站主办者可以通过更换空间,修改IP等手段躲过检查,二是同一IP(服务器)上往往有多个网站,这种方法会导致很多正常网站无法访问.

3 内容检查:实时监控的手段

经过GFW服务器的数据流,需要接受“安全检查”,一旦发现在禁止列表中的字符串,就立即中断信息传输.这样的方法更加灵活有效,可以直接针对某一特定类型的网页进行过滤,而不会“城门失火,殃及池鱼”.

GFW中断传输的方法主要是应用TCP重置,即同时分别向源主机和目标主机发送伪装成对方IP的TCP重置包,断开连接.因此GFW对于连接双方的举动是对称的.

具体来说,在正常情况下,两台计算机的连接需要“三步握手”,即SYN,SYN/ACK,ACK.之后便可以利用GET HTTP进行数据传输了.如果传输内容中含有不允许的字符串,GFW会立即发送多个不同的重置数据包,以确保源主机和目标主机能够接受其中至少一个重置要求.之后,目标主机根据TCP协议向源主机发送重置包,连接断开.

事实上,GFW的判断原理是简单的,只是根据当前的数据包决定是否拦截,并没有综合之前的网络连接状态.例如,不发送SYN连

接请求就直接发送含有不允许字符串的 GET HTTP 请求,同样会使连接双方收到重置包.

有时我们会发现在 Google.com 等网站搜索时,会出现首次能访问,再进行搜索时就无法显示网页,时间长达 1 分钟左右.GFW 发现触犯规则的访问请求,就会发送 TCP 重置包,并记录触犯规则的源主机和目标主机的地址对,保留一定的时间,如果源主机再次访问目标主机,就会直接被拦截.这次发送重置包会发生在 SYN/ACK 环节之后,使得连接刚建立就被中断,根本无法进行数据传输.估计 GFW 不在 SYN 环节之后立即发回 RST 的原因是避免利用这样的方法对其进行 SYN 攻击,需要阻止的只是确实存在的连接.

但是,保留一定时间的拦截方案,会给黑客"借刀杀人"的可能.黑客通过伪造 IP 地址,故意向指定计算机发送不允许的数据包,触发拦截机制,从而达到阻止特定的两台计算机通信的目的.

国内的 Google.cn 等网站一般不会发生类似情况,一种可能是没有经过 GFW 路由器(根据网络查询的路径),因此不会受到内容审查.

这样的内容过滤手段有一个缺陷,如果连接双方都故意不遵守 TCP 协议,进行适当的设置,对 TCP 重置包置之不理,就会导致连接正常进行,GFW 失效.此时连接双方只会收到夹杂在数据传输中的重置包,而不会影响真正的数据传输.

因此,GFW 的内容过滤技术仍然停留在使用 TCP 重置的"表面功夫"上,并未真正拦截发送的信息.要做到更有效的拦截,必须从数据传输的内部下功夫.

当然,GFW 的功能远不止这些.例如它可以捕捉瞬间增加的访问量并中断这种激增,这使得国内外之间进行洪水攻击变得几乎不可能.

4 内部结构:GFW 的运行图

从整体上说,GFW 由永久黑名单,临时黑名单和内容审查系统构成.用户发送一个数据传输请求,如果其 IP 地址在永久或临时黑名单中,立即截断传输.如果不在,则将数据包的信息通过审查系统,如果发现不允许的字符串,同样截断传输,并将对应的 IP 地址放入临时黑名单.如果上述审查都通过,数据包发送到目的计算机,信息传输正常.临时黑名单中的 IP 会在一段时间后自动解封.如果某个临时黑名单中的 IP 接到大量的非法访问请求,则由人工操作进入永久黑名单,很多网站都是这样被永久封闭的.当然,为了某些特殊目的,永久黑名单也会人工进行增加或删除.

5 加密连接:GFW 永远的痛

事实上,不论上述哪种方案,GFW 都存在一个致命的漏洞,就是对加密的连接束手无策.由于网络安全的需要,GFW 不可能取消加密机制,更不可能要求信息传输的计算机向 GFW 提供密码.因此 GFW 拦截有害信息的难度,等同于破译密码的难度,这显然是不可能做到的.因此在目前的网络传输协议下,GFW 从理论上无法拦截加密连接,这也是大量用户采用加密的代理服务器能够访问被禁止网站的重要原因.

面对加密连接,GFW 唯一能做的,就是利用人工的 IP 禁止和 DNS 劫持手段,将发现的不良网站一一加入禁止列表.事实上,目前 GFW 的主要屏蔽手段仍然是最原始的域名屏蔽和地址屏蔽.尽管如此,加密手段更先进的代理服务器,以及数据流的分散传输技术,使得 GFW 辨认有害信息的难度与日俱增.因此,GFW 迫切需要一种更为有效的屏蔽手段.

6 云计算:难以迈出的一步

"云安全"成为新时代防控计算机病毒的手段.病毒在不断产生,凭借"主动防御"很难自动判断新病毒,因此需要杀毒软件不断更新病毒库,按照特征码查杀.随着手动添加病毒库的力不从心,各大反病毒软件厂商纷纷启动了"云安全"计划,客户端软件检测可疑程序,并上报给网络中心,再由专家迅速判定,更新数据库.这样,比等到病毒大规模发作再采取行动,或者工作人员从网上手工寻找木马病毒要高效得多.

现在不良信息的传播也是这样的趋势,因此我国也启动了屏蔽不良信息的"云计划",其主要载体就是近期要求强制安装的软件"绿坝-花季护航",它采取的分布式计算技术,可以从数以千万计的计算机访问的网络资源中按照特定的规则自动筛选不良信息,并上报给信息部门,通过分析自动将不良信息添加进黑名单.这种方式摆脱了以往网警手动寻找不良信息,速度缓慢,行动滞后,漏网之鱼多的弊端,比 GFW 更有效.

更重要的一点是,无论何种加密连接还是代理服务器,到达用户端之后必须解密成本来的状态,否则用户无法查看需要的信息.单纯在通信线路上企图阻止信息传播,犹如希望在敌人的通信线路上设置窃听器,始终不能及时破解通信,屏蔽不良信息也就无从谈起.而在用户端进行屏蔽,则可以终止正在查看不良信息的浏览器进程,例如 IE 和 Firefox 访问不良网站时,都会被阻止.隔墙有耳,不如深入敌后,采用"用户屏蔽"是"网

络屏蔽”的重大突破.

诚然,不论怎样的屏蔽软件,都会有对应的反屏蔽措施.例如,卸载“绿坝”软件,虽然系统中还有一些垃圾文件,但经测试已没有任何实际作用.

“绿坝”软件的漏洞,也将酿成比暴风影音网络中断等事件更为严重的网络危机,因为“绿坝”会收集,记录系统的运行状态,网络浏览记录和个人信息,在系统中的权限也远远大于普通网络软件.一旦被黑客利用,用户的信息安全防线将顷刻崩溃.

7 系统后门:GFW 的终极出路

如果GFW确实希望从根本上截断不良信息,可以考虑深入系统内核.在这方面,微软的后门机制值得学习.

Windows 越用越大是不争的事实,即使运用各种软件进行清理,也不能完全回到原来的状态.这是因为,微软的操作系统中保存着一些不为人知的用户操作记录,这些内容在特定的加密数据库中,微软可以通过网络后门获取相关信息.

例如,Windows 会自动生成硬盘上文件目录树的索引,IE 会永久保存访问的每个页面地址,Outlook 会保存每个邮件的文本信息,而这些数据库加密隐藏在特定的位置,用户没有权限访问.

这里要澄清一点,一篇文章《被微软深度隐藏的文件》中说 Documents and Settings 文件夹中的 Temporary Internet Files 中,有个 Content.IE5,内部有若干 8 个随机字符命名的文件夹存放着上网浏览的个人资料,并指责“微软宣称它们并不存在”,事实上这是微软的一种方便查看的机制.Temporary Internet Files 文件夹是系统文件夹,通过ini文件进行了特殊设置,从而将所有Content.IE5中的文件按照时间顺序排列出来,这就是我们看到的 IE 缓存,并不是故意不显示.在 Windows Vista 中,由于内核不同,打开 Windows XP 中的 IE 缓存文件夹,可以看到真实的文件结构.但不可否认的事实是,这个文件夹中一定存在着不少猫腻,因为很多用户配置文件大小在不断增加,清除缓存也不见减少.

通过特殊的网络连接扫描工具可以发现,Windows 操作系统中的某些服务正在“秘密访问网络”,即使关闭了自动更新和一切应用程序仍然如此.这些端口一部分连接到 Mircosoft,一部分连接到美国的其他 IP,其作用我们不得而知.

因此,我国屏蔽不良信息,仅仅靠“绿坝”这样一款简单的软件是远远不够的,近期出现的诸多破解方法便是明证.要维护我国信息安全,防火墙系统作为盾牌,安全软件作为武器,缺乏的正是微软这样“深入敌后”的“心理攻略”.全球 13 台根域名服务器中 10 台在美国,有人宣称美国通过停止域名解析,可以让任何一个国家的域名(如.cn)从网络上消失,这不是信口胡言:近期网络作战指挥部的成立,更是对其他国家信息安全的挑战.我国的GFW显然相形见绌,在信息安全的道路上,仍然有很长的道路要走.

·命题解题·

最少称几次

有 12 个球和一个天平,只有一个与其他的重量不同(重或轻),问怎样称才能用三次找到这个球?

多数人都采用了分类讨论的方法.下面介绍网上的一种非常巧妙的办法.

将 12 个球编号 1-12.

1. a=(1,2,7,12)vs(4,5,9,10)
2. b=(3,6,10,12)vs(2,4,5,11)
3. c=(5,8,10,12)vs(6,7,9,11)

若左边重,记录 1,右边重记录-1,一样重记录 0.令 n=|a+3b+9c|,则 n 即为这个与众不同的球.

事实上,上述方法应用的正是三进制编码.根据信息论,要确定n个球中的一个特殊球,共有 2n 种情况(可能重或轻),而每次称量产生了 3 个状态,至少需要称量 $\log_3 2n$ 次,但这是一个信息论下界,事实上不一定能达到.

现在我们考虑几种类型的称球问题.\

1 无砝码天平,不同时称量

(1) N 个球,有一个坏球比其他球重.用无砝码天平需要称几次?

这个问题显然用 $\log_3 n$ 次即可解决.将这堆球尽量平均的分成 3 组,将其中的两组进行称量,如果质量相同,则在第三组中;否则就在两组中较重的一组中.运用递归(数学归纳法),可以得出重球.

(2) N 个球,其中有一个坏球与其他球重量不同,至少称几次.

答案是 $\log_3 2n$.(有些资料上说是

$\log_3(2n+1)$，由于取上整函数的存在，这两种表述是等价的.）

证明 先证充分性. 先用数学归纳法证明两个引理.

引理 1 有两堆球，一堆有 a 个球，另一堆有 b 个球，其中有一个坏球，满足下面条件：如果坏球在第一堆中，则此球比标准球轻，在第二堆中，则此球比标准球重，$a+b \le 3^k$，则 k 次可将坏球找出来. 并知其轻重.

引理 2 n 个球 $(3^{k-1}+1 < 2n \le 3^k+1)$，其中有一个坏球，另有 3^{k-1} 个标准球，k 次可将坏球找出.

原题证明：用数学归纳法，将 N 个球分成三堆 N1，N2，N3，使 N1+N2+N3=N，N1=N2，N3>=N1，并且 N1，N2 尽可能大；然后根据各种情况，交替利用引理 1，2 即可.

再证必要性：n 个球 $(3^{k-1} < 2n \le 3^k)$，其中有一个坏球，$k-1$ 次不可能将坏球找出.

用数学归纳法，反证法和引理 1，引理 2 证明引理 3，引理 4.

引理 3 有两堆球，一堆有 a 个球，另一堆有 b 个球，其中有一个坏球，满足下面条件：如果坏球在第一堆中，则此球比标准球轻，在第二堆中，则此球比标准球重，$a+b \le 3^k$，则 $k-1$ 次不可能将坏球找出来.

引理 4 n 个球 $(3^{k-1}+1 < 2n \le 3^k+1)$，其中有一个坏球，另有任意个标准球，$k-1$ 次不可能将坏球找出.

原题证明：运用反证法和数学归纳法，用天平称，只能将 N 个球分成三堆 N1，N2，N3，使 N1+N2+N3=N，N1=N2. 然后根据各种情况，交替利用引理 3，4 即可.

（3）N 个球，其中有一个球与其他球重量不同，至少称几次将其找出，并知其轻重.

答案是 $\log_3(2n+2)$.

（4）N 个球，其中有一个球与其他球重量不同，还有一个标准球（与多数球重量相同），至少称几次.

答案是 $\log_3(2n-1)$.

（5）N 个球，其中有一个球与其他球重量不同，现有一个标准球，至少称几次能够确定特殊球及其轻重.

答案是 $\log_3 2n$.

2 有砝码天平，不同时称量

有砝码天平必须严格遵守左物右码的规定，每次可以称出几个球的质量和.

3 无砝码天平，同时称量

所谓“同时称量”是指每次称量的两个集合必须事先给定，而不能在称量一次后根据结果决定集合. 显然，这样的做法比不同时称量困难得多. 例如本文开始的巧妙方法就是同时称量的例子.

（下期待续）

·科技之光·

写给反相对论者

我们经常见到一些“学者”在物理论坛上宣布驳倒了相对论. 但是，他们有没有想过，这恰好说明了自身对于相对论的无知.

多数反对相对论的人，拿出“光速不变”说事，举出种种“超光速”的例子，声称相对论的基本假设有误.

我们首先明确“光速不变”的确切含义. 一列在时间和空间上连续运动的光波的群速率在低于光速的观察者看来是一个常数.

首先，要明确“群速率”与“相速率”的区别. 群速率是指光波首尾发生位移对应的速率，相速率是指光波波形本身变化的速率. 打个比方，我们在使用钻头时，钻头上的螺纹转动很快，而钻头本身进入墙体的速度却没有这么快. 这里的螺纹就是我们观察到的光波波形变化的相速率，而进入墙体的速度才是光速不变假设中的群速率. 目前发现的超光速实验，以及将光“减速”“冻结”等实验，都是指光的相速率. 要验证光的群速率，可以让光携带信息，凭借特定时刻发送到的信息来检测光波实际走过的距离. 如果违反了光速不变，就会违背因果律，发生时间倒流或时间静止，这是不可能的.

其次，要强调时间和空间上的连续性. 由于同种微观粒子没有区别，因此刚从天狼星表面发出的光子和刚刚到达地球的光子不能区分，有些人利用这一特征设计实验，“证明”天狼星表面的光子在“一瞬间”到达了地球表面，这显然是荒谬的. 因此光速不变必须保证是同一个粒子在运动，这就要求时间和空间上的连续性，要求在运动时间中的任意一段，粒子在空间的位移都是有限值，因为不存在速度无穷大的粒子.

类似的，实物的速度不能超过光速，也

是要求这个实物连续运动,中间不能“偷梁换柱”. 一些物理现象的运动速度是可以超过光速的,例如一个经典实验,快速转动的射灯在云层上形成光斑的运动速度可以超过光速. 但是,这个光斑是由不同时刻的不同光子形成的,光斑并不是一种实物,因此不能证伪光速不变.

还有一些人,臆造出实物的某种不可能发生的运动,从而证伪光速不变. 例如有人说,取一根刚性长杆,固定一个端点高速旋转,则杆的另一端的运动速度可以超过光速. 事实上,这样的杆根本不存在. 由于杆的形状靠化学键,分子间作用力等电磁力维持,电磁力的载体是电磁波,电磁波的传播速度是光速,因此即使这根杆真的达到了光速(暂时不考虑质量增加到无穷大,需要无穷多能量的问题),后面分子发出的电磁波跟不上前面的杆,无法给前面的部分提供作用力. 由于后面部分的能量还在不断供给,速度加大而力不能传递,已达到光速部分会从原杆上脱落.

这个例子启示我们,电磁力的传播速度有限,因此在高速运动环境下,不存在刚体. 类似的悖论还有火车钻山洞,说是车长大于洞长的一辆火车从山洞中穿过. 根据狭义相对论,火车速度为 $\sqrt{1-\frac{l_1^2}{l_2^2}c}$ 时,在地面参考系看来,车头到达山洞口时,车尾恰好到达另一个洞口. 因此我们可以同时在山洞两端点关闭洞口,恰好将火车关入. 而根据火车的刚性模型,长度大于洞长,怎么可能被关入呢?问题就在这个“刚性模型”上,由于电磁力的传播需要时间,当车头的洞口封闭时,冲击引起的电磁力需要一段时间才能传到车尾,经过计算,这段时间恰好使得车尾运动到另一个洞口. 此时车尾的洞口关闭,火车确实被关进了山洞. 还有一些类似的试验,都是忽略了相互作用力传播需要时间的事实,构造一些“理想模型”试图推翻相对论.

最后,光速不变在光速参考系中不成立. 这也是某些反相对论者寻求“相对论内部逻辑矛盾”的方法.

除了证伪“光速不变”,反相对论者还常常拿出“牛顿力学”的老一套说事.

例如,有人利用牛顿力学中的动能公式 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和相对论质能公式 $E=mc^2$,试图导出矛盾. 事实上,这两者本身就是水火不相容的,不能在牛顿力学范围内讨论相对论问题. 有人认为,牛顿力学中的东西一定是对的,那就是强词夺理.

要真正驳倒相对论,只有以下两个途径,一是在相对论的理论体系内部进行推导,发现逻辑矛盾;二是通过正确的实验,推翻相对论存在的客观基础,即光速不变. 显然,他们做不到其中任何一点.

双生子佯谬是一个广泛讨论的问题,也是反相对论者的一把“利剑”.

设一对双胞胎,20 岁时哥哥乘飞船以 $v=0.8c$ 的匀速度离地球而去,弟弟留在地球上. 10 年后,弟弟 30 岁时,飞船到达星球 P,弟弟据运动时钟记时率变慢公式,认定弟弟在此期间经过的时间间隔应为 $\sqrt{1-\beta^2}\cdot 6a=3.6a$,即弟弟此时的年龄应为 23.6 岁. 弟弟认为哥哥年轻,哥哥认为弟弟年轻,虽然矛盾,但无法当面核实.

为了当面核实,常议论的一种方案是让哥哥以 $v=0.8c$ 的匀速度反向飞回,与弟弟见面. 重复相关计算,弟弟认为见面时自己是 30+10=40 岁,哥哥应是 26+6=32 岁. 而哥哥认为自己若是 32 岁,那么弟弟应当是 23.6+3.6=27.2 岁,究竟谁比谁年轻?

佯谬产生的原因,既不是所谓的“不能异地对钟”,更不是相对论本身的矛盾,而是哥哥返回的过程中,需要从正 0.8c 变到负 0.8c,中间经历了一段变速运动,所处参考系为非惯性系,不符合狭义相对论的匀速运动假设. 使用广义相对论处理,结果确实是哥哥比弟弟年轻.

在狭义相对论范围内,可以有这样一种见面方案:取一个中间惯性系,例如地球,哥哥与弟弟分别相对于这个惯性系以相同的速度大小,同时反向运动,在同样的时刻以同样的加速度大小相对中间惯性系使得速度反向,最终到达原出发点. 这样,哥哥和弟弟见面时,必定同样年轻或者同样衰老.

本质上,双生子佯谬是在讨论同一观测者对于相对自己运动状态改变的物体的时间进程的观测结论.

我们知道,爱因斯坦的相对论是由电磁学推导来的,他的第一篇相对论论文就是《论动体的电动力学》. 因此有些人将矛头直指相对论的发源地——电磁学.

他们认为,电磁学中必须像运动学一样引入伽利略变换,反对麦克斯韦方程组对于不同参考系统的事实. 而在电磁学实验中,从来没有对实验器材的运动状态做出任何要求;如果引入了伽利略变换,当实验器材发生相对运动时,各项物理常数会发生较大的变化,这是实验中不可能观测到的.

光速不变原理赖以生存的根基是著名的迈克尔逊-莫雷干涉实验. 很多人对这个实验横加指责, 因此有必要讨论一下.

19 世纪, 麦克斯韦建立了完整的电磁动力学体系, 即麦克斯韦方程组. 当时的物理学家习惯于将电磁波与机械波进行类比, 因此认为电磁波的传播需要介质. 而恒星之间的星际空间可以认为是真空, 没有介质, 因此麦克斯韦认为存在一种能够传导电磁波的介质, 称为以太. 而相对于以太静止的参考系, 称为以太系, 在以太系中麦克斯韦方程组成立.

以太系中的电磁波在真空中的波速 $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, 其中 ε_0 为真空介电常数, μ_0 为真空磁导率. 根据惯性系间的伽利略变换, 光速在不同的惯性系应当有不同的测量值.

如果地球系本身就是以太系, 相当于再次承认地球是宇宙的中心, 物理学家显然不同意. 如果地球系不是以太系, 则只要测出地球相对以太系的运动, 就证明了以太系的存在. 为此, 迈克尔逊设计了著名的迈克尔逊干涉实验, 通过光的干涉现象测量这种相对运动.

干涉仪主要由两块互相垂直的平面镜, 和一块半透明反射镜组成. 两个平面镜到达半透明反射镜的距离不同. 光源发出波长一定的光波, 遇到半透明反射镜分成两束, 分别垂直射向两个平面镜, 再返回半透明反射镜, 到达另一侧的光屏.

这样, 两个光束由于走过的路径不同, 会发生干涉, 并在光屏上出现干涉图样. 根据以太系的假设, 由于干涉仪随地球绕太阳公转, 干涉仪相对以太系的速度, 大小和方向都发生了变化, 这样两个光束走过的距离发生变化, 路程差也会随之改变. 根据干涉原理, 路程差的变化会导致强弱叠加区域的变化, 反映出来就是干涉条纹的移动.

但是, 无论是迈克尔逊本人的实验, 还是后来莫雷提高实验精度后的实验, 都没有观测到任何干涉条纹移动. 这证明以太系是不存在的.

面对经典理论的危机, 当时的物理学家大多将矛头指向麦克斯韦的电磁场理论. 而爱因斯坦坚信麦克斯韦方程组的正确性, 勇敢的否定了牛顿力学中的伽利略变换, 进而创立了相对论.

很多反对相对论的人, 重复迈克尔逊实验时, 没有把实验器材内部抽成真空, 结果发现了干涉条纹的移动, 进而对光速不变原理横加指责. 事实上, 介质中的光速与介质本身的运动状态是有关的, 因此必然发生干涉条纹的移动. 光速不变原理针对的只是真空中的光速在任何非光速参考系中相同.

类似的, 还有人在水槽中完成干涉实验, 发现干涉条纹的移动, 同样不符合真空要求, 不能成为光速变化的证据.

还有人在相对论的“同时”上做文章, 认为时间是衡量因果进程的唯一标准. 在相对论中, “现在”并不是“同时”发生的事件, 而是能够在有限时间内与观测者发生相互作用的空间范围. 因此, 所有过去与将来的联系必须通过现在来实现, 不存在直接从过去到将来的跳跃, 也就不允许时空转移这类幻想, 这一点是与逻辑学中的因果论统一的, 相对论的时间变换不会导致逻辑矛盾.

事实上, 所有试图证伪相对论的方法, 不外乎以下几种:

1. 用牛顿力学运动学反驳相对论, 或凭借生活实践想当然.

2. 歪曲相对论的有关定义定理, 不在适用范围内讨论.

3. 只观其一不观其二, 用狭义相对论讨论广义相对论问题.

4. 臆造无穷大的质量, 能量和速度.

5. 否定支持相对论的实验结果, 或者自己做不符合要求, 误差过大的实验.

6. 数学推导过程不严密.

7. 不理解相对论时空观但使用日常的同时等概念导出“矛盾”.

相对论经过无数客观事实的检验, 由之发展来的多个物理学分支学科也取得了重大的突破, 在核能利用等方面已投入实际生产, 是一个完整的自洽理论体系. 因此, 相对论绝不是几个人找出所谓的“矛盾”就能推翻的. 建议那些一知半解的反对相对论的人, 认真系统地阅读相对论的相关文献, 通过严格的数学计算验证理论的正确性.

我们的研究方向, 只能是提出更先进的理论, 就像相对论看待牛顿力学一样, 将相对论视为其特殊情况的近似, 使人类对宇宙的认识更进一步.

·科技之光·

人体为什么会自燃

在报刊杂志上的奇闻逸事中,常常可以看到这样的报道:某人在家中无故身体自行起火,身体被彻底焚烧,并且身边的物品都正常.某些人由此开始装神弄鬼,借机宣传封建迷信.而我们要从科学的角度解释.

某些所谓的“科学家”做出了这样的“解释”:关于人体自燃现象,可以从耗散结构和混沌科学来解释.……人消化粮食,在人体内生成葡萄糖.人消化葡萄糖反应称糖酵解,有13个反应步骤.其中有两个步骤是耗散结构振荡.生成成分NADH(即辅酶A)的振荡波.后来发现:这些振荡波的频率,与人的人体信息波的频率重合.这就说明人体内存在由于消化葡萄糖而产生的某种人体信息波.这种人体信息波可以在人体周围形成一种人体信息波场.人体信息波在体内运行过程可以产生能量的积聚.

人体信息波在经历无数次迭代之后,突然产生某个窗口,使人体信息波的能量密度增大到多少个几千万倍.这样大的能量可以使人周围的可燃物体燃烧.这就揭开了人体内的人体信息波能量急剧增大的机理.

当然不是每个人都有这种积聚.只有极少数人在身体条件极佳时才可能产生.这个迭代所产生的高能,产生在什么地方,什么时候都是偶然的.但是有一点可以肯定:它是不确定的.

对科学知识一知半解的人,往往容易被这类伪科学所迷惑.事实上,所谓的“人体信息波”根本不存在,完全是作者臆造出来的;能量急剧增大,也是不可能的,因为人体内没有如此多的能量,这违反了能量守恒定律.至于“突然打开某个窗口”,则更是无稽之谈.本来用高中理化知识就能解释的人体自燃问题,为何要搞得如此玄乎呢?

纵观“人体自燃”的各种案例,有一些共同特点:

1.死者被焚烧的程度比正常火灾严重,有时甚至比火葬炉还要彻底.但是身体的焚烧程度并非均匀分布.四肢的前部通常未烧毁,而躯干和大腿被烧的程度最严重.

2.周围的物品一般未起火.

3.地板上往往留下一层粘稠的黄色油状液体.

4.人体自燃多发于妇女和身材肥胖的人,以及醉酒后的人.

5.死者没有呼喊救命或尝试自救,而是听任火将自身烧光.因此人体自燃总是致命的.

6.人体自燃从来不是自发产生的,在死者的周围总可以找到火源,例如油灯、蜡烛、火炉、香烟.另外,有些所谓“人体自燃”的案例,实际上是谋杀案.

既然在“人体自燃”案例中,总能找到火源,又何必求助于像人体静电放电、球状闪电这类无法证实的新火源?问题是,像烟火、烛火那样小的火源,如何能把人烧得粉身碎骨?

事实上,原因并不复杂,通常称为“灯芯效应”.酒醉或昏睡中的人穿的衣服被其他火源点燃,皮肤被烧脱落,皮下脂肪融化、流出,衣服被液化脂肪浸湿后成了“灯芯”,而体内的脂肪就像是“蜡”,源源不断地提供燃烧的燃料,于是尸体就像蜡烛一样慢慢地燃烧,直到所有的脂肪组织都被烧完.

这个理论可以解释上面所归纳的“人体自燃”的特征.妇女和身材肥胖的人体内脂肪含量高,因此容易成为“人体自燃”的牺牲品.多余的脂肪通常储存于躯干和大腿,因此这些部分的烧毁程度最严重.没有衣服覆盖的身体部分不会被烧毁,因为融化的脂肪需要有衣服做“灯芯”才能充分地燃烧,但是液化脂肪流到这部分的身体后,会将那里的皮肤烫伤,而死者残存的身体部分的皮肤的确有烫伤的症状.脂肪燃烧时会产生浓烟,这可以解释为什么死者房间的天花板和墙壁会被熏黑.有些融化的脂肪会流出体内,流到地板上,由于没有衣服做灯芯,它们不会燃烧,而残留下来,这就是为什么在死者身下的地板总能发现黄色的粘稠物质.

1998年4月,加州犯罪学学院的John De Haan博士做了一个实验首次验证“灯芯效应”.他从屠宰场买了一头死猪(猪的脂肪含量与人体相当)裹上毛毯,放进一个模拟房间中,房间里有一个木架,上面放着一台电视机.他往毛毯上浇上少量的汽油后将之点燃.

猪油流出后浸泡毛毯,使之成了灯芯,火焰便以猪油为燃料持续燃烧了7个小时.大约5小时后,猪骨头被烧裂,流出了骨髓,骨髓大约含有80%的脂肪,因此继续燃烧,直到把骨头烧成了灰烬,甚至比火葬炉烧得还要彻底(火葬炉焚烧后,还会残留一些骨头).而猪身体没有脂肪的部分,像脚的下部,则保存完整.周围的家具都没有着火,只有电视机受热融化了.这一结果与所谓的“人体自燃”完全相同.

因此,人体自燃绝不是自行起火燃烧,

人体也不可能在没有火源时自行起火.而一个很小的火种,由于灯芯效应,可以将全身烧毁,这就是人体自燃的可怕之处.

很多“超自然现象”事实上原理并不复杂,只要认真分析特征,用科学知识就可以完美解释,完全没有必要大惊小怪.

还有一些人,出于某种目的,或者本身精神不正常,臆造出本来不存在的案例,就更不足为信了.例如网络上炒得沸沸扬扬的“大脑控制秘密技术”,事实上是精神分裂症的一种,患此病的人就会感到大脑被控制,常常感觉到一些特殊的声音,图像和思想冲动,精神趋于崩溃.实际上,人类的脑技术还远远没有到达“控制大脑”的层次,只是能够通过脑电波分析,了解大脑中很小一部分运行机理,获取简单问题的处理结果,进而实现“大脑控制电脑”.不要说控制人脑,即使是破解人的思想这类复杂的行为,脑科学家目前也无能为力.

很多人宣传封建迷信思想,还利用了错误的统计.他们忽略与所宣称的理论不符的事实,不与正常情况下的概率进行比较,得到的分析结果当然不可信.例如宣称烧香拜佛能够消灾减灾,举出几个烧香之后摆脱困境的例子,再举出几个没有烧香而停留在困境中的例子.但我们应该明白,还有烧香后没有摆脱困境的,以及没有烧香仍然摆脱困境的,只是宣传者秘而不宣罢了.为了科学的验证烧香拜佛与走出困境是否具有相关性,可以利用统计学中的“相关性检验”客观地进行计算,结果总是没有相关性.

因此,面对特殊现象,只要坚定科学信念,就能正确解释其原因.如果深入探究,还有可能实现科学的新突破.

参考文献:《人体自燃是真是假》,《牛顿-科学世界》2001 年第 10 期.

·沙场点兵· 2009 年信息学竞赛命题趋势分析

近年来,随着信息学竞赛训练的不断深入,越来越多的选手对经典算法越来越熟练.因此考察选手的水平,单靠一眼能看出算法的试题是不行的.例如 NOIP2008 的试题,确实比 2000 年左右的难很多,但仍然出现了大批 300 分以上的选手,甚至出现 330 分扎堆的现象,这充分证明信息学选手的基础知识水平越来越牢固,掌握的算法越来越多.

五年前联赛时,可能只有高手才掌握类似 NOIP2008 二取方格数的动态规划算法,但时至今日,几乎每个经过正规训练的选手都做过 VIJOS 上的三取方格数,试题的简单性不言而喻.在这种情况下,今年的联赛不能再延续去年高分段扎堆的情况,因此必须加大题目难度,让直接套用算法无计可施.

由于竞赛大纲规定的算法和数据结构没有改变,显然不能将 NOI 的内容引入 NOIP.今年冬令营,CTSC,NOI 特别夏令营等一系列高端竞赛,传递出一个信号:对于高级数据结构的考察越来越少,即使是国家级高端竞赛也只用到了网络流,线段树这些高级结构,而且都是其中的经典问题,没有太大的变形.而跳跃表,树状数组,平衡树等更为高级的结构几乎没有涉及.

与之相反的是,建立数学模型变得越来越困难,动态规划题的状态越来越难划分,状态转移方程越来越难推导,有时还需要运用数学方法进行方程的简化.这要求选手能够另辟蹊径,从独特的视角观察问题,建立合适的数学模型,并使用特定方法解决.甚至有的问题,第一眼看起来只能用搜索,事实上某个方面具有无后效性和最优子结构,抓住这个方面就能找到多项式算法.据此,笔者预测,2009 年将是高水平动态规划问题大放异彩的时刻.

有趣的是,从已经结束的几项比赛来看,2009 年搜索问题似乎不很吃香.事实上,搜索中的剪枝与优化,包括模拟退火等局部搜索算法,以及启发式搜索,同样能够反映选手的就题论题,随机应变能力.

有人说,能够尽量快地解决 NP-Hard 问题,才是真水平.当今信息学前沿研究的问题基本上都是 NP-Hard,科学家攻坚的目标一方面是降低复杂度,有的指数级算法在数据规模不很大时,甚至优于多项式算法;另一方面是寻找较优解,在多项式时间中尽量使解接近最优.这两个方面同样是信息学竞赛中搜索问题的命题方向.尤其是根据解的优劣给分,是笔者特别推崇的.

另外,一些“无门无派”的算法也逐渐登上历史舞台.这就要求选手对算法灵活掌握,不能拘泥于经典模式,更不能背诵代码.

例如今年冬令营的三道试题,灵活性是非常强的.比赛时没有一个人完整的 AC 一道题,只有第三题提交答案题得分普遍较高,前两题即使是国家集训队选手,每题得分一般也在 50 以下.很多选手甚至连朴素算法的 30 分都没有拿到手.因此,即使每道题都用

朴素算法骗分,也能取得不错的成绩.

今年NOI特殊夏令营的试题就是经典算法汇聚.例如,第一天的第四题就是赤裸裸的最小费用最大流.但很多选手都没有得分,这是非常可惜的.第一天第一,二题都是动态规划(第一题还用到了线段树,第二题用到了容斥原理).第二天的第一题也是一个比较简单的网络流问题,只是需要增加源点汇点,把两个公司之间冲突的连上MAXINT的边,最后用总和减去最大流即可,这是最经典的网络流构图方式.第三题则是二分图匹配的变形,构造方法是把原图中的点看作A部,把原图中的边看作B部,增加源点和汇点,与第一题如出一辙.

由此可见,目前信息学竞赛的试题已经开始模式化,套路化,只是在问题背景上下功夫,问题的数学本质已经很难创新了.这次NOI特别夏令营为了避免问题过于简单,只能采用“算法拼盘”的方式,例如将动态规划用线段树优化(其实这也不是新鲜事),把数学问题和动态规划联系起来,再加上搜索,使得写出的程序代码尽可能长.但是,这种出题方式并不能从本质上增加题目难度,仍然没有考察出选手的算法创新能力.

因此,笔者认为冬令营的试题是一个有益的尝试.这套试题的满分算法自然比较复杂,但各种原创的算法根据优劣,可以取得不同的分数.即使是标准算法,也是在某种经典算法的基础上,针对本题的特殊性进行修改优化,或者加上一些特殊的限定条件.

第三题是笔者最推崇的一道题,它要求选手观察数据,而这些数据本身是某种经典问题的转化版本,这样对于不同的数据使用对应的经典算法即可解决.这道题是数学建模的好题.可惜的是,很多在场的选手并未注意到数据的规律性,而是盲目地多次随机取最大值,得到的分数自然不理想.

这种新题型能够考验选手“透过现象看本质”的能力,充分体现选手思考问题和独立解决问题的水平.笔者希望NOI2009与NOIP2009多出现这样的问题.

关于信息学竞赛的命题与测试数据的设置,在笔者的《骗分导论·信息学竞赛》中有较详细的讨论,此处从略.

综上所述,笔者认为2009年的信息学竞赛将逐渐走出经典算法堆砌的老路,逐渐引导选手在考场上建立数学模型,修改经典算法,设计新算法,培养创新能力.

最后,衷心祝愿各位同学在NOI2009和NOIP2009中取得好成绩.

·沙场点兵·

NOIP2009 模拟试题（一）

编者注 由于截稿时间紧迫,笔者暂时没有命制新题,而是将去年石家庄二中模拟赛的部分试题略作修改.这些试题的数据在数之理论坛上可以下载,并可在RQNOJ评测系统上在线评测(推荐).这套题比较水,仅供体验感觉,请大牛藐视.

理科大拼盘模拟赛

最近数学,物理,化学的文化课都很忙,数学课要学习加法运算,物理课要学习牛顿第二定律,化学课要学习原子核,还有一大堆作业要做.(此人显然偏科严重)

第一题 数学:小明学算术

(RQNOJ P286)

小明最近接到了一项算数的作业。黑板上初始时只有一个数1。每次取在黑板上的任意两个数（可以相同）相加，得到另一个数，要求这个数比黑板上已有的任意一个数都大，并把所得的符合要求的和数也写在黑板上。这称为一次操作。当黑板上首次出现指定的整数n(2<=n<=1000)时，停止操作。

小明的加法学得很不好，算一次加法需要很长时间。他希望学编程的你找到一种方案，用最少的操作次数得出指定的数n。

输入格式

只有一行。包含一个整数n(2<=n<=1000)，表示指定的整数。

输出格式

两行。第一行一个整数，表示最少操作次数。第二行若干个空格隔开的整数，表示操作结束时黑板上的所有数，按从小到大的顺序输出。若有多组符合要求的解，输出次大的数最大的一组；若还多解，输出第三大的数最大的一组；以此类推。

样例输入

【样例输入1】 2

【样例输入2】 200

样例输出

【样例输出1】 1 1 2

【样例输出2】 9 1 2 4 8 16 32 64 128 192 200

第二题 物理:运输

(RQNOJ P357)

由于龙族在战争初期处于守势，所以

Alyosha 决定先修建一些防御工事来迟滞风族的进攻。而一个很显然的事实是：修建坚固的防御工事需要大量的材料，包括石头、木头和一种特殊材料 Plastica。而 Alyosha 这里正好有很多奇妙的魔法材料，这些魔法材料可以在上述三种材料中任意转化。

不幸的是，Alyosha 放材料的地方和军营相距很远。为了解决运输问题，佣兵团中的机械师 Sire 设计了一种人形运输工具。Sire 会在别的地方对这些运输工具进行指挥。如果我们把放材料的地方当作坐标原点建立坐标系的话，那么指挥的方式如下：

（1）运输工具前进的基本方向为北、南、西、东，分别用 W,S,A,D 表示。同时它还可以向复合方向前进，所谓符合方向就是指东北、西北、东南、西南四个方向，他们的表示由基本方向复合而成，例如东北方向就可以表示为 WD 或 DW，二者是等价的。运输工具只能向这八个方向前进。

（2）运输工具可以在一个时间段内对材料持续施加 10000N 的力。

（3）Sire 会在某个时间点对运输工具发出新的指令。接到新指令后，由于物理定律的存在，运输工具会保持原有的运动状态。并且在两个指令之间，材料的受力和材料种类不发生变化。

（4）由于某些不可预知的原因，Sire 在发出的指令会附加一些让魔法材料转化的效果。

由魔法材料转化来的石头、木头和 Plastica 的质量分别为 50t，5t 和 1t。当然，材料的变化在运输工具的前进之前就已经完成了。

（5）材料在最开始时是静止的。

现在 Sire 想知道在某一个时刻 M 运输工具的坐标。

数据规模

对于 100% 的数据，1<=N<200，M<=3000，所有的 W<=3000

输入格式

第 1 行：一个正整数 N，表示 Sire 共发出了 N 条指令。

第 2..N+1 行：先是一个整数 W，表示 Sire 在时刻 W 发出了一个指令。接下来给出指令中让运输工具前进的方向和指令中让材料变换成的种类（石头，木头和 Plastica 分别用 S,W,P 表示）。方向和种类用 '.' 分隔。

第 N+2 行：一个正整数 M，表示 Sire 想知道运输工具位置的时间。

输出格式

两行，第一行为时刻 M 时材料位置的横坐标，第二行为其纵坐标，保留 1 位小数，四舍五入。对于实数运算，请采用 double 数据类型。

样例输入

3 1 W.S 3 W.P 4 D.P 4

样例输出

5.0 16.2

第三题 化学:Libojie 的化学作业 (RQNOJ P351)

Libojie 在家做化学作业。靳达（化学老师）告诉 Libojie 化学元素可以进行多种衰变。α 衰变会使原子核裂变出一个氦核（He2+，原子核中子数减 2 质子数减 2）。β 衰变会使原子核的一个中子放出一个电子后衰变为一个质子。靳达还告诉 Libojie 原子核可以和氕（一个质子）、氘（一个质子和一个中子）、氚（一个质子和两个中子）进行聚变（即中子数和质子数相加）。现在靳达让 Libojie 进行原子核的变换，而 Libojie 只有一台粒子碰撞器。Libojie 还想在做完化学作业后学习 IMO 呢！请帮他找出一种方法使得转换的步数最少（一次衰变或一次裂变都算一次转换）。

输入格式

4 个整数 A B C D（0<A,B,C,D<200）。分别代表反应物和生成物的质子数和中子数。（友情提示：转换的中间过程 A B C D 可能会超过 200）

输出格式

一个整数 n(最少的转换步数)。

样例输入

5 6 10 15

样例输出

5

第四题 作业:解题 (RQNOJ P89)

(本题笔者命制时基本相似,后来发现 RQNOJ 上已有类似题.)

SubRaY 被布置了 n 道作业题,可是他一道也不会.但他知道有 w 位高手,并知道每位高手会做哪些题,请问 SubRaY 至少请多少位高手,才能把所有的题都做出来?

数据范围

对于 40%的数据,3<=n,w<=10,

对于 100%的数据,3<=n,w<=60,1<=li<=6.

输入格式

第一行两个整数 n,w 表示有 n 道作业

题和w 位高手,作业题以1..n 编号.接下来w 行,第 i+1 行第一个数 li 表示第 i 位高手会做的题目的数量,接下来 li 个数表示第 i 位高手会做哪些题目.

输出格式

一个数,SubRaY 至少要请多少位高手.

样例输入

4 4 2 1 2 1 4 3 2 3 4 2 1 3

样例输出

2

解题思路

第一题 小明学算术

本题是一道搜索题。如果盲目选择搜索顺序，则会导致超时。笔者采用的方法是，从大至小搜索，尽量先加较大的数，这样首先可以减少步数，尽量快的逼近最优值；另外可以尽快减去不可能的“枝条”，提高效率。另外,搜索时遵循“每次生成的数最大”的原则，如果生成的数比最大数还小，一定在其他时候已经重复枚举了。

本题有两个剪枝：可行性剪枝、最优性剪枝。可行性剪枝：如果当前获得的数比目标整数 n 还大，则停止搜索；最优性剪枝：若当前已经搜索到的数最快到达n需要的步数比当前最优值还大，则停止搜索。这里的估计使用了“乘二的次幂”的方法，由于无论如何变化，速度不可能超过自加。

有人认为，为了减少重复运算，还可以采用记忆化的方式，记录达到每个值所需的最小步数。这样的想法是错误的，由于两个数相加时可能有前面用过的公共的数，不是简单的步数相加；记录前面的数也不可行，由于得到同一个 n 有多种方法。程序具体实现时，要注意常数优化。

(具体讨论参见《骗分导论·信息学竞赛》)

第二题 运输

这是一道模拟题，并具有一些物理的味道，需要用到匀变速运动的知识。

（1）进行字符串处理，把运输工具前进的方向、材料的种类分开。

（2）依次处理运输工具的每次移动，根据上次的末速度和本次的加速度（可用受力/质量算得）计算出下一变换时刻的速度（v1=v0+at），并计算位移。

（3）对每次移动，重复（2）。

（4）如果下一时刻大于终止时刻，则视为最后一次移动。将终止时刻视为下一次的开始时刻，进行（2）的操作，得到终点坐标。

（5）处理时注意运动的分解，应该将所有受力、速度、加速度、位移分解在 x、y 两个互相垂直的方向上，便于计算。8 个允许运动方向也正是方便分解而设置的。

这道题有一些违反物理定律的地方：材料变化种类后，质量发生变化，而速度不变，推出动能瞬间改变，即力是无穷大的，这是不科学的。可以将题目改为：材料变化种类后，动能不变，这样需要对上次的速度进行变换。

可能出现的问题主要是字符串处理、最后一次移动，要小心细致。

第三题 化学作业

此题可以用动态规划或 BFS 解决.用二维数组表示当前状态,两个维度分别是质子数和中子数.而每次裂变或聚变,都可以对质子数或中子数进行改变.这种改变就是动态规划中的状态转移方程,或者 BFS 中的搜索状态变换.由于数据规模很小,只要没有无穷递归或循环计算,不存在超时的问题.

看似简单,事实上一次 AC 也并不容易.

首先,多数人容易忽略的是,转换的中间过程 A,B,C,D 可能超过 200,尽管有了友情提示,仍然有很多人简单的对 200*200 的数组进行二维动态规划,显然错误.

其次,有一小部分人使用了 DFS.这显然是不可行的,因为质子数和中子数会无穷增加,导致无穷递归,堆栈崩溃.

事实上,本题使用 BFS,可以保证结果的最优性;而由于状态是稀疏的(很多质子中子数还没有扩展到就已经达到目标了),记忆化搜索的速度会快于动态规划.因此,某些人“动态规划一定比搜索快”的思想需要改变.

具体编写程序时,要严防地址越界.这道题只要细心,应该不难 AC.

第四题 解题

本题是一道搜索问题.采用深度优先搜索,每次搜索一个人并把他能做的题去掉.

需要三个最优化剪枝:

(1)如果一个高手能做的有一个高手完全能做,那么他的存在就没有意义.

(2)如果有一题只有一个高手能做，那么最后必定要选这个高手，递归时这个选手可去掉.

(3)如果目前所选的人数已经超过或等于已知最优解的人数，那么这一步再继续走就没有意义.

这道题有一个比较阴险的地方,就是输入数据中同一个人会做的题中有重复,如果直接处理就会出现错误.比较简便而安全的方法是使用邻接矩阵,将会做的题标记为 1.

注意以上问题,再注意代码的常数复杂度,减少冗余操作,一般不会超时.

有些人试图采用贪心或动态规划的方法,这些算法都是错误的.这个问题的数学模型是:有 N 个集合,要求选出最少的集合,使它们的并集是一个给定的集合.这个问题已经证明是 NP-Hard 的,因此只能在搜索中的剪枝优化上下功夫.

·沙场点兵· 2009 年数学竞赛命题趋势分析

2009 年全国高中数学联赛的命题方式有了重大改变,取消了选择题,加大了第二试的比重,这显然是增加题目难度的一个信号.尤其是在多数选手不熟悉的数论,组合等方面将加大考察力度.

从《中等数学》近期的模拟题来看,第二试的组合问题涵盖了不等式估计,组合几何,图论,集合的划分与覆盖等多个方面,考察较为全面,不能对任何一个方面轻言放弃.而这些题目的难度并不低,基本上都不是"套路题",需要分类讨论,自行推理分析.

今年第二试的平面几何将回归经典,不再像去年那样带有一定的解析意味.需要使用最经典的边角关系,或者添加辅助线进行变形推导.三角法作为一种通法,预计可以应用.关于几何定理的考察将越来越少,即使使用也只能是梅涅劳斯,塞瓦,托勒密,张角这类基本定理.命题人应该有意回避高级定理,以免掌握此定理的选手获得优势.

联赛的不等式问题,预计也将减少对著名不等式的考察,回归到经典的代数变形,和式变换等问题上来.选手若直接使用著名不等式,可能会"放过头",这就增加了题目的难度.如果出现不等式问题,调整法预计仍是一个不错的选择.由于联赛难度的限制,出现多项式,函数方程的可能性不大.

二试中的数论问题,预计将考察质数合数方面,采用经典的同余分析,无穷递降等方法,结合费马小定理等证明互质或合数.也可能在构造数列方面命题,采用数学归纳法证明存在任意长的特定数列,或者利用极端值原理证明不存在无穷长的数列.

而第一试的解答题难度也将有所提高,偏重代数问题,难度接近第二试.当然,解析几何问题是必不可少的,预计今年将会出现一些新变化,例如与代数不等式结合.

第一试的填空题难度和内容与往年基本相当,没有太难的题目,但很多问题仍然可以使用一些技巧快速猜出答案.对于填空题,最重要的是速度和正确率,保证简单题不丢分.

根据笔者模拟赛的经验,第一试的 80 分钟时间是很紧的,不要在任何一道填空题上浪费太多的时间,以免最后解答题时间不够用.而第二试的 150 分钟则显得宽松,选手完全没有必要紧张,如果题目会做,应该是可以完成的.尽管如此,除非其他题都已经做完或决定放弃,不要在一道题上花费超过 1 小时,以免丢了西瓜捡芝麻.当然,到 1 小时如果已经离解出不远了,至多可以在这道题上再增加 20 分钟时间.如果一道题思考 30 分钟没有任何思路,就应该暂时放弃,解决下一个问题.

预计今年联赛的试题将在灵活性上下功夫,很多问题不能使用已有的经典方法解决,而要巧妙变形,创造新方法.这就要求考生在答题时心要平静,不能看到新题型就慌神,也不能指望套上做过题的思路,而要认真思考,寻求新出路.也许试题本身并不难,但考场上很多选手心态不好,就会"晕场".

预祝各位同学在 2009 年全国联赛中正常发挥,取得好成绩.

·沙场点兵· 2009 年数学联赛模拟试题(一)

第 一 试

一. 填空题(每小题 7 分,共 56 分)

1. 已知 a,b,c,d 为正实数,则函数 $f(x)=\sqrt{(x+a)^2+b^2}+\sqrt{(x+c)^2+d^2}$ 的最小值为__________.

2. 在 $n\times n$ 的棋盘上放有 n^2 个象,每个方格里有一个象.将这些象分成 m 类,使同一类中的象都不在一条斜线上.则 m 的最小值为________.

3. 面积为 1 的凸四边形的四边与两条对角线的长度之和的最小值为_________.

4. 正四棱锥内接于半径为 R 的球,外切于半径为 r 的球.则 $\frac{R}{r}$ 的最小值为_______.

5. 甲乙二人轮流投掷一枚均匀硬币,甲

先投,先累计投出3次正面者获胜.则甲的获胜概率为________.

6. 多项式 $P(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+5x^6+4x^7+3x^8+2x^9+x^{10}$ 在实数范围内分解因式得到的项数为____.

7. 某校自主招生共有 n 个学科,学生A,B,C三人参加,在每个学科中,第一,二,三名分别得 p_1,p_2,p_3 分,其中 $p_1>p_2>p_3$ 且为正整数.最后A得22分,B和C均得9分.已知B在数学中取得第一,则得到第二最多的人是________.

8. 正整数 n 满足 $2009<n<3009$,且 n 的所有奇约数之和为1024,则 $n=$_____.

二. 解答题(共44分)

9. (14分)设双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的中心为 O. 任一半径为 r 的圆交双曲线于 P,Q,R,S 四点.求证: $OP^2+OQ^2+OR^2+OS^2=4r^2$.

10. (15分)三角形 ABC 的三边长分别为 a,b,c,三边上的高线长分别为 h_a,h_b,h_c,内接圆半径为 r,实数 $0<\lambda\le 2$,整数 $n\ge 0$. 求证:

$$\frac{a^n}{h_a-\lambda r}+\frac{b^n}{h_b-\lambda r}+\frac{c^n}{h_c-\lambda r}\ge(\frac{2}{3})^n s^n\cdot\frac{3}{(3-\lambda)r}.$$

11. (15分)令 f 是一个定义在实数集上的严格递增函数.对任意实数 x 和正数 t,定义 $g(x,t)=\dfrac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}$.

对于所有 $0<t\le|x|$ 或 $x=0,t>0$,不等式 $\frac{1}{2}<g(x,t)<2$ 都成立.求证:对于所有的实数 x 和正数 t, $\frac{1}{14}<g(x,t)<14$.

第 二 试

1. (50分)设四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,边 BA,CD 相交于点 P,边 AD,BC 相交于点 Q,对角线 AC,BD 相交于点 M. 求证: O 是 $\triangle MPQ$ 的垂心.

2. (50分)给定正整数 $a_1\ge a_2\ge a_3$,令 $N(a_1,a_2,a_3)$ 为方程 $\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\frac{a_3}{x_3}=1$ 的正整数解 (x_1,x_2,x_3) 的个数.证明 $N(a_1,a_2,a_3)\le 6a_1a_2(3+\ln(2a_1))$.

3. (50分)求最小的非负整数 n,使得存在非常数函数 $f:Z\to[0,+\infty)$,满足

(1) $f(xy)=f(x)f(y)$

(2)对任意整数 x,y,

$2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)\in\{0,1,...,n\}$

对这个最小的 n,求出所有满足上述条件的函数.

4. (50分)设集合 $A_1,A_2,...,B_1,B_2,...$ 满足 $A_1=\varnothing,B_1=\{0\}$,且对任意正整数 n, $A_{n+1}=\{x+1\mid x\in B_n\}$, $B_{n+1}=A_n\cup B_n-A_n\cap B_n$. 求出所有使得 $B_n=\{0\}$ 的正整数 n.

参 考 答 案

第 一 试

一. 填空题

1. $\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}$.

$f(x)$ 可看作平面直角坐标系内 $A(x,0)$ 点与点 $B(-a,b)$,点 $(-c,d)$ 距离之和,若求 $f(x)$ 最小值,即求 $AB+AC$ 最小值,作C关于X轴的对称点 $C'(-c,-d)$,此时 $BC'^2=(a-c)^2+(b+d)^2$.

取 A 点位于 BC' 与 X 轴的交点处,若此时 $AB+AC=BC'$ 不为最小,则有点 $A'(x',0)$ 使得 $A'B+A'C<B'C$, 此与三角形两边之和大于第三边矛盾,故 $f(x)$ 最小值为 BC'.

2. n.

将棋盘黑白相间染色.

若 n 为偶数,两条对角线一条全是黑格,另一条全是白格.在同一条对角线上的 n 个黑(白)象必须属于不同的类,因此至少需要 n 类.

另一方面,将同一行的(黑或白)象算作一类,共分为 n 类,每一类中的两只象不在同一条斜线上,符合题意.

如果 n 是奇数,不妨设棋盘的四个角为黑格,则两条对角线都由 n 个黑格组成,而全由白格组成的斜线至多有 $n-1$ 个白格.因此至少需要 n 类.

再将同一行的黑象算作一类,黑象至少分成了 n 类.将第 n 行的白象与第一行的白象算作一类,其余各行的白象自成一类,共分为 $n-1$ 类,总类数为 n,符合题意.

3. $4+2\sqrt{2}$.

设 AC, BD 交于点 O, 设 $AO=e, OC=f$, $OB=g, OD=h$, 设 $\angle AOB=\alpha$, 则

$$1=S_{ABCD}=\frac{1}{2}(eg+gf+fh+he)\sin\alpha$$

$$\le\frac{1}{2}(e+f)(g+h)\le\frac{1}{2}(\frac{e+f+g+h}{2})^2,$$

即对角线长度之和 $e+f+g+h\ge 2\sqrt{2}$.

又因为

$$2=2S_{ABCD}=\frac{1}{2}ab\sin A+\frac{1}{2}bc\sin B$$

$$+\frac{1}{2}cd\sin C+\frac{1}{2}da\sin D$$

$$\le\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)$$

$$\le\frac{1}{2}(\frac{a+b+c+d}{2})^2$$

故周长 $a+b+c+d\ge 4$.

综上, 四边与两对角线之和 $\ge 4+2\sqrt{2}$.

4. $\sqrt{2}+1$.

设正四棱柱 $S-ABCD$ 的底面中心为 O, 底面边长为 a, 它的外接球球心为 O_2, 内切球球心为 O_1, 由对称性知 O_1, O_2 必在 SO 上, 且 $SO\perp$ 底面 $ABCD$.

作 $O_1F\perp SBC$ 于 F, 直线 SF 比过 BC 中点 E, 记 $SO=h, \angle SEO=\alpha$, 易知

$$r=O_1F=O_1O=\frac{a}{2}\tan\frac{\alpha}{2},\ O_2O=h-R,$$

$$OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

由 $O_2B^2=O_2O^2+OB^2$ 得

$$R=\frac{2h^2+a^2}{4h},$$ 由于 $h=\frac{a}{2}\tan\alpha$, 所以

$$R=\frac{a(\tan^2\alpha+2)}{4\tan\alpha}.$$

令 $t=\tan^2\frac{\alpha}{2}$, 则

$$y=\frac{R}{r}=\frac{\tan^2\alpha+2}{2\tan\alpha}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+t^2}{2t(1-t)}.$$

关于 t 的方程 $(2y+1)t^2-2yt+1=0$ 有实数根, 故判别式 $\Delta=4y^2-8y-4\ge 0$, 注意 $y>0$, 解得 $\frac{R}{r}=y\ge\sqrt{2}+1$.

5. $\frac{46}{81}$.

定义甲乙轮流投掷, 甲先投, 甲投出 m 次正面朝上获胜, 乙投出 n 次正面向上获胜, 此时甲获胜的概率为 $P(m,n)$.

显然, $P(0,i)=1, i=1,2,\ldots$, $P(i,0)=0, i=1,2,\ldots$, $P(1,1)=\frac{2}{3}$.

一般的, 当 $m\in N^+, n\in N^+$ 时, 有

$$P(m,n)=\frac{1}{4}(P(m,n)+P(m-1,n)$$

$$+P(m,n-1)+P(m-1,n-1))$$

化简得

$$P(m,n)=\frac{1}{3}(P(m-1,n)+P(m,n-1)$$

$$+P(m-1,n-1))$$

由上述递推关系, 可得 $P(2,2)=\frac{16}{27}$, $P(3,3)=\frac{46}{81}$.

6. 6.

$$P(x)=(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2.$$

7. C.

考虑三个人的总分，有方程：

M(p1+p2+p3)=22+9+9=40, ①

又 p1+p2+p3≥1+2+3=6, ②

∴6M≤M(p1+p2+p3)=40，从而 M≤6.

显然 M≥2，又 M|40，故 M 可取 2,4,5.

若 M=2，又 B 数学第一，但总分仅 9 分，故必有：9≥p1+p3, ∴≤8，这样 A 不可能得 22 分.

若 M=4，由 B 可知：9≥p1+3p3，又 p3≥1，所以 p1≤6, 若 p1≤5，那么四科最多得 20 分，A 就不可能得 22 分，故 p1=6.

∵4（p1+p2+p3）=40, ∴p2+p3=4.

故有：p2=3, p3=1, A 最多得三个第一，一个第二，一共得分 3×6+3=21＜22，矛盾.

若 M=5，这时由 5(p1+p2+p3)=40，得：

p1+p2+p3=8. 若 p3≥2，则：

p1+p2+p3≥4+3+2=9，矛盾，故 p3=1.

又 p1 必须大于或等于 5, 否则, A 五科最高只能得 20 分, 与题设矛盾, 所以 p1≥5.

若 p1≥6，则 p2+p3≤2，这也与题设矛盾，∴p1=5，p2+p3=3，即 p2=2，p3=1.

A=22=4×5+2.

故 A 得了四个第一，一个第二；

B=9=5+4×1，

故 B 得了一个第一，四个第三；

C=9=4×2+1，

故 C 得了四个第二，一个第三.

8. 2604.

设 $n=2^k p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$, 其中 p_i 为不同的奇素数. 则 n 的奇约数之和为

$$\prod_{i=1}^{r}(1+p_i+\ldots+p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{r}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}=2^{10}.$$

注意到 $1+p_i+\ldots+p_i^{\alpha_i}$ 是 α_i+1 个奇素数之和. 由于和的乘积为 2 的次幂, 每个和必须是偶数. 因此, 每个 a_i 必须是奇数.

因为 $1+11+11^2+11^3>1024$, 若 $p_i>11$, 则 $a_i=1$, 且 $1+p_i$ 必须是 2 的次幂, 且不大于 1024. 满足 $p_i\ge 11$ 的可能取值为 31 和 127（由于 5|255, 7|511, 3|1023）

若 $p_1<11$, 则 $p_1=3,5,7$. 检查 $a_i=1$, $p_i=3$ 或 7. 因此对于所有的 $i, a_i=1$, 故 p_i 的所有可能取值为 3, 7, 31, 127. 其中能够生成约数和 1024 的只有 $(1+3)(1+7)(1+31)$, 此时 $n=651\cdot 2^k$; 或 $(1+7)(1+127)$, 此时 $n=889\cdot 2^k$. 又 $2009<n<3009$, 因此 $n=651\cdot 2^2=2604.$

二. 解答题

9. 证明: 设方程为

$$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$$

的圆与双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的交点用极坐标记为 $(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)$, 于是

$$\rho^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=a^2$$

即 $\cos 2\alpha=\dfrac{a^2}{\rho^2}$. ①

由圆的方程得

$$(\rho\cos\alpha-c)^2+(\rho\sin\alpha-d)^2=r^2,$$

即

$$\rho^2-2\rho(c\cos\alpha+d\sin\alpha)=r^2-c^2-d^2.$$

故 $(\rho^2+c^2+d^2-r^2)^2$

$$=4\rho^2(c\cos\alpha+d\sin\alpha)^2$$

$$=4\rho^2(c^2\cos^2\alpha+d^2\sin^2\alpha+cd\sin 2\alpha)$$

$$=4\rho^2(\frac{c^2}{2}(1+\frac{a^2}{\rho^2})+\frac{d^2}{2}(1-\frac{a^2}{\rho^2})+cd\sin 2\alpha).$$

移项, 平方得

$$((\rho^2+c^2+d^2-r^2)^2-2(c^2+d^2)\rho^2-2a^2(c^2-d^2))^2=16\rho^4c^2d^2\sin^2 2\alpha.$$

结合①式, 消去 α 得

$$(\rho^4-2r^2\rho^2+(c^2+d^2-r^2)^2-2a^2(c^2-d^2))^2=16c^2d^2(\rho^4-a^4).$$

上式可看作关于 ρ^2 的 4 次方程, 而 OP^2,OQ^2,OR^2,OS^2 是它的四个根. 由于上式中 ρ^8 的系数为 1, ρ^6 的系数为 $-4r^2$, 由韦达定理,

$$OP^2+OQ^2+OR^2+OS^2=4r^2.$$

10. 证明: 令 s 为三角形周长的一半, 由三角形面积知

$h_a=\dfrac{2rs}{a},h_b=\dfrac{2rs}{b},h_c=\dfrac{2rs}{c}$. 故

$$\frac{a^n}{h_a-\lambda r}=\frac{a^{n+1}}{r(2s-\lambda a)}$$

$$\frac{b^n}{h_b-\lambda r}=\frac{b^{n+1}}{r(2s-\lambda b)}$$

$$\frac{c^n}{h_c-\lambda r}=\frac{c^{n+1}}{r(2s-\lambda c)}$$

不妨设 $a\ge b\ge c$, 则 $a^n\ge b^n\ge c^n$. 故

$$\frac{1}{2s-\lambda a}\ge\frac{1}{2s-\lambda b}\ge\frac{1}{2s-\lambda c}.$$

由切比雪夫不等式,

$$\frac{a^{n+1}}{2s-\lambda a}+\frac{b^{n+1}}{2s-\lambda b}+\frac{c^{n+1}}{2s-\lambda c}$$

$$\ge\frac{1}{3}(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})(\frac{1}{2s-\lambda a}+\frac{1}{2s-\lambda b}+\frac{1}{2s-\lambda c})$$

而 $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{3}$

$$\ge(\frac{1}{3}(a+b+c))^{n+1}=(\frac{2}{3}s)^{n+1},$$

$$\frac{1}{2s-\lambda a}+\frac{1}{2s-\lambda b}+\frac{1}{2s-\lambda c}$$

$$\ge\frac{9}{6s-\lambda(a+b+c)}=\frac{9}{2s(3-\lambda)}.$$

$$\therefore\frac{a^{n+1}}{2s-\lambda a}+\frac{b^{n+1}}{2s-\lambda b}+\frac{c^{n+1}}{2s-\lambda c}$$

$$\ge(\frac{2}{3})^n s^n\cdot\frac{3}{3-\lambda}.$$

两侧同乘 $\frac{1}{r}$，命题得证.

11. 证明：只需考虑 $t>|x|$ 的情形.

不妨设 $x>0$. 一方面，令

$a_1=f(-\frac{x+t}{2})-f(-(x+t))$，

$a_2=f(0)-f(-\frac{x+t}{2})$,

$a_3=f(\frac{x+t}{2})-f(0)$,

$a_4=f(x+t)-f(\frac{x+t}{2})$.

由于 $-(x+t)<x-t, x<\frac{1}{2}(x+t)$，得到 $f(x)-f(x-t)\le a_1+a_2+a_3$.

又因为 $\frac{1}{2}<\frac{a_{j+1}}{a_j}<2$，得到

$$g(x,t)>\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3}>\frac{a_3/2}{4a_3+2a_3+a_3}=\frac{1}{14}$$

另一方面，令 $b_1=f(0)-f(-\frac{x+t}{3})$,

$b_2=f(\frac{x+t}{3})-f(0)$,

$b_3=f(\frac{2(x+t)}{3})-f(\frac{x+t}{3})$,

$b_4=f(x+t)-f(\frac{2(x+t)}{3})$.

若 $t<2x$，则 $x-t<-\frac{1}{3}(x+t)$，因此 $f(x)-f(x-t)\ge b_1$.

若 $t\ge 2x$，则 $\frac{1}{3}(x+t)\le x$，因此 $f(x)-f(x-t)\ge b_2$.

由于 $\frac{1}{2}<\frac{b_{j+1}}{b_j}<2$，得到

$$g(x,t)<\frac{b_2+b_3+b_4}{\min\{b_1,b_2\}}<\frac{b_2+2b_2+4b_2}{b_2/2}=14.$$

综上，$\frac{1}{14}<g(x,t)<14$.

第 二 试

1. 引理：设圆内接四边形 ABCD 的对边延长线交点为 P，Q，则 $PQ^2=d(P)+d(Q)$，其中 $d(P),d(Q)$ 分别代表 P，Q 对圆的幂，即这点向圆所引切线长的平方.

证明：将 PQ^2 分为两部分，分别为 P 对圆的幂和 Q 对圆的幂.

为此，过点 P,A,D 作圆交 PQ 于 N. 则 $QN\cdot PQ=QD\cdot QA$ 为 Q 对 $\odot O$ 的幂.

由于 $\angle PND=\angle BAD=\angle DCQ$，故 N,D,C,Q 共圆. 从而 $PN\cdot PQ=PD\cdot PC$ 是 P 对 $\odot O$ 的幂.

以上两式相加，引理得证.

类似可证，$MP^2=d(P)+d(M)$，$MQ^2=d(Q)+d(M)$.

故 MP^2-MQ^2

$=d(P)+d(M)-d(Q)-d(M)$

$=d(P)-d(Q)$

$=(OP-R^2)-(OQ-R^2)$

$=OP^2-OQ^2$.

由勾股定理，得 $OM\perp PQ$. 同理 $OP\perp MQ, OQ\perp MP$，故 O 为 $\triangle MPQ$ 的垂心，命题得证.

2. 定义 N_{pqr} 为满足 $\frac{a_p}{x_p}\ge\frac{a_q}{x_q}\ge\frac{a_r}{x_r}$ 的解的个数，其中 (p,q,r) 是 (1, 2, 3) 的 6 个排列之一. 下证

$N_{pqr}+N_{qpr}\le 2a_1a_2(3+\ln(2a_1))$.

首先，由 $\frac{3a_p}{x_p}\ge\frac{a_p}{x_p}+\frac{a_q}{x_q}+\frac{a_r}{x_r}$ 和 $\frac{a_p}{x_p}<1$ 得 $a_p+1\le x_p\le 3a_p$.

类似的，固定 x_p，有

$\frac{2a_q}{x_q}\ge\frac{a_q}{x_q}+\frac{a_r}{x_r}=1-\frac{a_p}{x_p}$，

$\frac{a_q}{x_q}\le\min\{\frac{a_p}{x_p},1-\frac{a_p}{x_p}\}$.

其中 $\max\{\frac{a_qx_p}{a_p},\frac{a_qx_p}{x_p-a_p}\}\le x_q\le\frac{2a_qx_p}{x_p-a_p}$.

若 $a_p+1\le x_p\le 2a_p$，x_q 至多有 $\frac{2a_qx_p}{x_p-a_p}+\frac{1}{2}$ 个可能的取值(因为在 x 与 $2x$

之间有$[2x]-[x]=[x+\frac{1}{2}]$个整数）. 若$2a_p+1\le x_p\le 3a_p$, 则至多有$\frac{2a_qx_p}{x_p-a_p}-\frac{a_qx_p}{a_p}+1$个不同的取值.

若给定x_p,x_q, 则x_r被唯一确定. 因此

$$N_{pqr}=\sum_{x_p=a_p+1}^{2a_p}(\frac{a_qx_p}{x_p-a_p}+\frac{1}{2})$$

$$+\sum_{x_p=2a_p+1}^{3a_p}(\frac{2a_qx_p}{x_p-a_p}-\frac{a_qx_p}{a_p}+1)$$

$$=\frac{3a_p}{2}+a_q\cdot$$

$$\sum_{k=1}^{a_p}(\frac{k+a_p}{k}+\frac{2(k+2a_p)}{k+a_p}-\frac{k+2a_p}{a_p})$$

$$=\frac{3a_p}{2}+a_q\sum_{k=1}^{a_p}(1-\frac{k}{a_p}+a_p(\frac{1}{k}+\frac{2}{k+a_p}))$$

$$=\frac{3a_p}{2}-\frac{a_q}{2}+a_pa_q(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{a_p}(\frac{1}{k}+\frac{2}{k+a_p}))$$

$$\le a_pa_q(\frac{3}{2a_q}-\frac{1}{2a_p}+\ln(2a_p)+\frac{5}{2}-\ln 2)$$

其中$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}+\frac{2}{k+n})\le\ln(2n)+2-\ln 2$, 这可以用数学归纳法证明.

因此,

$$N_{pqr}+N_{qpr}\le 2a_pa_q(1+\frac{1}{2}+\ln 2a_p$$

$$+2-\ln 2)<2a_1a_2(3+\ln(2a_1)).$$

故所有排列的个数$=3(N_{pqr}+N_{qpr})<6a_1a_2(3+\ln(2a_1))$, 命题得证.

3. 引理1: 如果n是一个正整数, 且$(a,n)=1$, 则存在整数$0<x,y\le\sqrt{n}$使得$xa\equiv\pm y(\bmod n)$.

证明: 对所有$0\le x,y\le[\sqrt{n}]$, 考虑数$xa-y$, 得到一个$([\sqrt{n}]+1)^2>n$个数的列表, 由抽屉原理, 必有两个数$\bmod n$同余. 设它们是ax_1-y_1,ax_2-y_2. 不妨设$x_1>x_2$（显然$x_1\ne x_2$）, 令$x=x_1-x_2,y=|y_1-y_2|$, 引理1得证.

引理2: 任意形如$4k+1$的素数都可以写成a^2+b^2的形式.

证明: 考虑$n=(2k)!$. 由 Wilson 定理,

$$-1\equiv(p-1)!\equiv 1\cdot 2\cdots(\frac{p-1}{2})(p-\frac{p-1}{2})\cdots$$

$$(p-1)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(\frac{p-1}{2})!^2\equiv(2k)!^2(\bmod p)$$

故存在整数n使得$p\mid n^2+1$.

显然, $(p,n)=1$, 应用引理1, 必存在$0<x,y<\sqrt{p}$（由于$\sqrt{p}\notin Z$）使得$p\mid n^2x^2-y^2$. 由于$p\mid n^2+1$, $p\mid x^2+y^2$, 又由于$0<x,y<\sqrt{p}$, 得到$p=x^2+y^2$, 引理2得证.

回到原题. 首先证明, 对$n=1$, 存在满足条件的函数.

令A,B分别表示形如$4k+1,4k+3$的素数集合. 对任意$p\in B$, 定义

$$f_p:Z\to Z,\ f_p(x)=\begin{cases}0, & p\mid x\\ 1, & p\nmid x\end{cases}$$

由定义, 显然f_p满足题意.

下面证明, 若f不是常函数, 则$n>0$. 不然, $2f(x^2+y^2)=f(x)+f(y)$, 令$y=0$, 有$2f^2(x)=2f(x^2+0^2)=f(x)+f(0)$. 再令$x=0$, 则$f^2(0)=f(0)$. 由于$f$不是常函数, 必有$f(0)=0$. 一般的, 对任意整数$x$, 有$2f^2(x)=f(x)$. 若存在一个$x$使得$f(x)=\frac{1}{2}$, 则$f^2(x^2)\ne 2f(x^2)$, 矛盾. 因此$n=1$是满足条件的最小值.

下面证明每个满足$n=1$的非常数函数一定是f_p形式的. 已经证明$f(0)=0$, 又因为$f^2(1)=f(1)$, 而f不是常数函数, 故$f(1)=1$. 对任意整数x, $2f^2(x)-f(x)=2f(x^2+0^2)-f(x)-f(0)\in\{0,1\}$. 因此$f(x)\in\{0,1\}$.

由于$f^2(-1)=f(1)=1$, $f(-1)\in[0,+\infty)$, 必有$f(-1)=1$, $f(-x)=f(-1)f(x)=f(x)$. 因为$f(xy)=f(x)f(y)$, 对于任意素数p, 可以求出$f(p)$. 我们证明只有一个素数p满足$f(p)=0$.

由于f不是常数函数, 必存在一个素数

p，使得 $f(p)=0$. 假设存在另一个素数 q，使得 $f(q)=0$. 则 $2f(p^2+q^2)\in\{0,1\}$，故 $f(p^2+q^2)=0$. 对于任意整数 a,b，

$$0=2f(a^2+b^2)f(p^2+q^2)$$
$$=2f((ap+bq)^2+(aq-bp)^2).$$

由于 $0\le f(x)+f(y)\le 2f(x^2+y^2)$，必有 $f(ap+bq)=f(aq-bp)=0$，矛盾. 因此，恰有一个素数 p 使得 $f(p)=0$.

假设 $p=2$. 则对任意偶数 x，$f(x)=0$，而对任意奇数 x,y，$2f(x^2+y^2)=0$. 则对任意奇数 x,y，$f(x)=f(y)=0$，故 f 是常数函数，矛盾.

因此 $p\in A\cup B$. 不妨设 $p\in A$. 由引理 2，存在正整数 a,b 使得 $p=a^2+b^2$. 因此 $f(a)=f(b)=0$. 但 $\max\{a,b\}>1$，存在一个素数 q 使得 $q\mid\max\{a,b\}$，$f(q)=0$. 不然，$f(\max\{a,b\})=1$，矛盾.

显然，$q<p$，我们找到两个不同的素数 p,q 使得 $f(p)=f(q)=0$，这是不可能的. 一般的，$p\in B$，且对 $x=kp,k\in Z$，$f(x)=0$. 对 $x\ne kp$，$f(x)=1$. 因此，满足条件的函数必定是 f_p 形式的，命题得证.

4. 证法一

我们证明当且仅当 n 是 2 的次幂时，$B_n=\{0\}$.

对于整数集 S，令 $2S$ 表示集合 $\{2x\mid x\in S\}$，令 $S+k$ 表示集合 $\{x+k\mid x\in S\}$，其中 $k\in Z$.

首先证明 $n\ge1$ 时 $0\notin A_n$. 由定义，A_1 成立. 由于 A_{n+1} 是 B_n 的元素加 1 得来的，而 B_n 的元素非负，故 A_{n+1} 中的所有元素均正. 由归纳法，命题成立.

下面用数学归纳法证明 $n\ge2$ 时下列命题成立.

(1) $A_{2n-1}=2A_n-1$

(2) $B_{2n-1}=A_{2n-1}\cup B_{2n}$

(3) $B_{2n}=2B_n$

(4) $1\in B_{2n-1}$

当 $n=2$ 时，由于 $A_2=\{1\},B_2=\{0\}$，$A_3=\{1\},B_3=\{0,1\},A_4=\{1,2\},B_4=\{0\}$，命题显然成立.

假设命题对 $n-1$ 成立. 即 $A_{2n-3}=2A_{n-1}-1$，$B_{2n-3}=A_{2n-3}\cup B_{2n-2}$，$B_{2n-2}=2B_{n-1}$，且 $1\in B_{2n-3}$.

命题(1)成立，由于

$$A_{2n-1}=B_{2n-2}+1=2B_n+1$$
$$=2(A_n-1)+1=2A_n-1.$$

下面证明(2). 由归纳假设，

$$A_{2n-2}=B_{2n-3}+1=(A_{2n-3}\cup B_{2n-2})+1$$
$$=((2A_{n-1}-1)\cup 2B_{n-1})+1$$
$$=2A_{n-1}\cup(2B_{n-1}+1).$$

由于 $B_{2n-2}=2B_{n-1}$，

$B_{2n-1}=A_{2n-2}\cup B_{2n-2}-A_{2n-2}\cap B_{2n-2}$，

$B_n=A_{n-1}\cup B_{n-1}-A_{n-1}\cap B_{n-1}$，我们得到

$$B_{2n-1}=2A_{n-1}\cup(2B_{n-1}+1)\cup 2B_{n-1}$$
$$-(2A_{n-1}\cup(2B_{n-1}+1))\cap 2B_{n-1}$$
$$=(2B_{n-1}+1)\cup 2A_{n-1}\cup 2B_{n-1}$$
$$-2A_{n-1}\cap 2B_{n-1}$$
$$=(2B_{n-1}+1)\cup 2B_n.$$

其中第二步去掉集合 $2B_{n-1}+1$ 是由于其元素均为奇数，而集合 $2B_{n-1}$ 的元素均为偶数.

又因为 $A_{2n-1}=2B_{n-1}+1$，故

$$B_{2n-1}=A_{2n-1}\cup 2B_n. \qquad ①$$

下面证明(3). 根据定义，B_{2n} 包含恰属于集合 A_{2n-1} 与 B_{2n-1} 之一的元素. 由①，B_{2n} 不包含任何在 A_{2n-1} 中的元素.

另一方面，由于 $A_{2n-1}=2A_n-1$，故 A_{2n-1} 的所有元素都是奇数，它们与 $2B_n$ 中的元素不可能相同. 因此，B_{2n} 即为 $2B_n$.

将(3)代入①，得到(2).

下面证明(4). 由于 $B_{2n-1}=(2B_{n-1}+1)\cup 2B_n$，且 0 是每个 B_i 的元素，故 $1\in 2B_{n-1}+1$，因此 $1\in 2B_{n-1}$.

归纳结束. 现在证明满足 $B_n=\{0\}$ 的正整数 n 必是 2 的次幂. 只需对 $B_{2n}=2B_n$ 应用数学归纳法，即可说明每个 2 的次幂具有上述性质. 另一方面，若 n 不是 2 的次幂，注意(4)中下标为大于 1 的奇数的集合都含有 1 的事实，应用无穷递降法，必有一个时刻出现奇数下标，集合中含有 1，而从此时出发，集合中不可能只剩下 0. 命题得证.

证法二

利用母函数法. 定义 $g_1(x)=g_2(x)=1$，

$g_{n+1}(x)=g_n(x)+xg_{n-1}(x)$.只需证明对于每个$i$,当且仅当$g_n(x)$的每个$x^i$的系数为奇数时,$i\in B_n$.

令$f_1(x)=0, f_{n+1}(x)=xg_n(x)$,证明

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1-k}{k}x^k$$ 满足题设.

最后用同余方法证明结论.具体证法从略.此法来自原题出处,不推荐使用.

·心灵驿站·

程序人生

人生处处程序，程序片片人生。

当 NOIP 的终止哨吹响，又是一切似曾相识的开始。也许悲伤，也许畅快；也许为 NOI 而继续徜徉，也许永远作别那熟悉的机房。程序，字母与数字的集合，诠释着生命本初的向往。

有人问，学习信息学竞赛有什么用。显然，多数人就是为了保送一所好大学。更有甚者，“NOIP 一等奖证书一发，算法导论就扔进旧书箱”。我们不禁想，这样学到的一些所谓的程序，不过是无聊字母构成的一个个文件，实在没有什么深的意义；由此，中国学术的不正之风，中国难以拿到的诺贝尔奖，中国在科技领域仍然落后的事实，也便不难诠释了。

偌大的中国，竟不能得一个诺贝尔奖！观夫日本以弹丸之地，致科技之巅，获强国之位，岂为科技之原因乎？中华五千年灿烂，领先于世界，而今纵一奖而不可得，何也？功名过甚而钻研不足也。科技如此，竞赛何以例外？试使竞赛之生，得奖而掷学，不思持之以恒，则中华信息产业之复兴，又远于强国之林也。

我早就说过，我向来是不对当下某些人的素质抱有任何幻想的。但我也明白，单凭一己之力，难以改变现实，只能奋臂高呼，仅此而已。而此生最美的风景，则是自然，更进一步，则是科学。

富兰克林说过，他人生的最大动力是爱情、知识和对世界的同情心。我则认为，站在自然界浩瀚的大海面前，捡拾几颗美丽的珍珠，则是人生最大的财富。

最美的风景不在浮华的宫殿，最深的情感不在潇洒的语言。人类区别于动物的最大特征，就是感情系统。而将这个系统放在怎样的环境下运行，装入怎样的软件，则是由每个人自己决定的。这台系统是如此精密，它对客观世界的一切细小的变化了如指掌；这台系统又是如此强大，它对客观世界的一切复杂的事情洞察清晰。系统软件，则是人装入的思想与境界。

我为我的系统装入这样的程序，它不求功名，只求现在的快乐；它不求光耀，只求自然的探索。它不愿为那些所谓的“一等奖”徘徊于两点一线之间，只为心中的理想而进入那浩如烟海的竞赛书籍的世界。

人生俯仰，就是在构建属于自己的程序；程序纷繁，就是在控制人生的进程。

当程序调入内存，一个生命呱呱坠地。程序编写完毕，不容修改，正如先天的基因不能改造。算法的优劣，已经决定了这个程序的初步走向；但更大的变化空间，还在输入的数据：一组好的数据，适合的数据，能使程序瞬间出解，非常正确；而那些极限数据，或超时，或错误，难以保证程序的运行是否顺利完成。

当读入函数开始执行，教育构成一切变量的初始值，起到至关重要的作用。硬盘灯在闪烁，那是记忆系统在疯狂的接受这个世界赋予他的一切。没有评判，没有选择，只有默默的接受，不知所云的接受，即使是机械的模仿。动作，语言，思想，感情，一项项参数从自然界的文件读入。内存中，一个世界的雏形，正在渐渐形成。

当主运行函数开始执行，奋斗的历程谱成一曲美妙的音乐，但静悄悄的，不为世人所知，用瓢泼的汗水挥洒在处理器的运行途中，内存中构建着未来的生命之塔。 CPU 利用率达到 100%，内存占用达到峰值，这时系统最累最苦的时刻，但黑色的屏幕没有任何反应，就像隐匿深山的桃花源中发生的一切。算法的优劣，这时已见分晓，只是未被世人所知罢了。

当一切做好准备，输出函数便开始工作。渐渐为世人所知，成果缓缓浮现，一项项与输入迥然不同的输出，展现在社会的大屏幕上。程序的好与坏，对与错，价值连城与一文不值，也便开始接受世界的评判。输出的内容，同样不容更改。你不能在测评结束后修改主程序，你不能在结果输出后反悔执行的失误。

当输出宣告完毕，程序的使命便行将结

束。它只是做几个收尾的工作，把文件关闭，以便后人使用；把内存释放，以便其他程序运行；最后，进程从任务管理器中消失，宣告了程序的终结。终结的程序并没有为自然界忘记，内存中还有运行过程的影子，只是很快就被重新分配初始化，于是程序运行的过程被自然界的操作系统所淡忘；但输出的文件，却永久保留在自然界的硬盘上，留待再次使用。

当又一个用户登录，看到这个程序生命中所输出的一切，就会生发出无限的感慨。或崇敬，或唾弃；或喜爱，或质疑；或光宗耀祖，或名声扫地。因为算法的优秀，有的输出百年不遇；但人们想找回程序运行的中间过程，甚至重新运行一遍，却又是那样的不可能：程序纷繁，那些内存的地址早已被覆盖千百次，不留任何痕迹。于是，算法变成了人类永恒的话题。为了一个良好的输出，主程序中深度优先，广度优先，在自然界的初值中反复探索、回溯、更新最优值，不惜CPU 完全占用，不惜把其他进程的空间挤占，甚至试图获取操作系统的底层控制权限，俯瞰程序运行的一切。

这就是程序。人生的程序，与我们编写的程序相较，输入输出难以计数，函数语句冗长难懂，变量定义杂乱无规。这样，搞懂人生的程序，便成为难于上青天的任务。好在几千年的先哲们，已经零散的作出了片片研究成果，散落在文明的田野中等待捡拾，这些算法，或许值得我们学习，不说抄袭，但大可借鉴。

创造良好的算法，是人生追求的目标；而自己创造的算法，又指引生命之程序执行的方向。人生程序，程序人生。每当我看到那程序的窗体一闪而过，便想到内部蕴含的丰富的过程。也许程序的运行十分短暂，但输出将长久地停留在操作系统的桌面。

我为什么学习信息学竞赛，为什么初赛遇到如此大的风波临危不乱，为什么复赛进入省队却并未欢声雀跃，从人生的程序，也许可以找到答案。信息学竞赛，在人生的程序中，也许只是一个极小的函数；但每个函数都具有不可或缺的功能，缺少任何一条语句，就不能称作是完整的程序。

我愿用程序控制人生。选择一个优秀的算法，为全人类输出有价值的成果，就是我毕生的追求。我不在意执行过程中的千变万化，只为那输出一刻。把学习数学物理信息学三个学科的竞赛当作乐趣，获得如此令人羡慕的成绩，同时搞好文化课，包括费大力气开办这个博杰学习网，把我所知的一切毫无保留的告诉所有热衷于科学事业的人们……在常人看来或幼稚，或天真，或虚伪，或功名显赫，或不可思议的那些努力，其实都是为了那个人生终极的程序——为了给自然界的操作系统留下有意义的输出。我始终相信，有这个不言悔的信条，任何难以企及的高峰，都可以在开阔豁达的背景下攀登。

但愿每个人生都有美好的程序相伴。

(本文写于 2008 年 11 月 20 日)

·牛人足迹· 贾志豪：创造竞赛奇迹

贾志豪 石家庄二中学生，已保送清华大学计算机系。

获信息学竞赛全国一等奖、数学竞赛省一等奖、物理竞赛省一等奖，并在文化课方面稳居班级前列。这样优异的成绩，在石家庄二中竞赛史上是极为少见的。

首先，学科竞赛与高考科目学习并不冲突。参加学科竞赛，可以在课上时间老师讲重要内容、进度较紧时认真听讲，在进度较松时完成作业。这样课下时间可基本全部用于学科竞赛。只要善于抓小时间，充分利用边角时间，就可以做到竞赛高考两不误。

其次，合理安排时间，“计划，并全力执行”，是成功的秘诀。学习竞赛，要善于制订计划。在高二上学期，应使用专题训练的方式，计划每个专题使用多长时间，做哪些书籍，达到什么程度。在高二下学期，应使用模拟实战的方式，完全按照竞赛要求答题、阅卷、排名，甚至判定“省队”和“一等奖”。最好利用竞赛培训时间完成这种训练，而主要应当是竞赛教练员下较大力气。

另外，重要的一点是，一定要注重基础，细心认真。当前竞赛趋势越来越简单，基础扎实、做题认真的选手易于取得较好的成绩。

同样重要的是，团队精神在竞赛学习中起着举足轻重的作用。遇到不会的题目，要善于与同学交流、讨论。

最后，只有努力奋斗，不怕吃苦，尽一切可能为竞赛创造良好的条件，才能夺取竞赛的胜利。

Q：竞赛做题的难度应控制在什么水平？

A：高一主要学习基础，做省赛难度题。高二上学期，可主要做适量国际赛、国家赛题，

难度略高于省赛，提高实力。高二下学期，可主要做与省赛难度相当的模拟试题，巩固基础，兼顾提高。

Q：竞赛做一道题大约消耗多少时间？若一道难题耗时过长，是否不如做几道简单题？什么时候应该看答案？
A：随科目与难度而异。一般把握这样的原则，使用竞赛考试时的时间衡量做题时间。当然，难题用时比简单题要长很多，但收获也很大。我们做题的目的不是追求数量，而是收获解题思路、解题方法。所以简单题可以适度做，但不宜多做，否则效果不明显。宁可用一两个小时弄懂一道有价值的难题，也不要做十道简单无意义题。当超过竞赛做题允许时间时，即可放弃该题，查看答案，并作标记。这样可以对做题的时间有一个大概的把握，控制好答题的节奏，避免考试时时间不够用。

Q：经常遇到第一遍做会做，第二遍却不会，或看了答案后当时会做，过一天后又不会做的情况，该怎么办？
A：应该将这类题做上特殊标记，不必抄在特殊的本子上，下次看书时注意即可。实际上，竞赛题的解答要凭“人品”，当运气好的时候，突然闪过一个好的念头，题目就迎刃而解了。一般以后不会解的题目都是难题，这时多读几遍标准解答，认真思考一会，抓住解答中关键步骤和思想的闪光点，将巧妙的解题思路积累下来。各种题目的巧思妙解，都是某个思维的闪光点，抓住这种巧妙方法的本质即可。

Q：经常做一道题时前10分钟集中精力考虑，后面脑子似乎不转了，什么也想不起来，怎么办？
A：人的大脑不可能长时间集中精力于一件事情，当长时间思考而没有什么收获时，意识会自动放弃这道题，就是大脑一片空白的感觉。遇到这种情况，可暂时放下这道题，做其他题目，一会再想。也可以将所有已经想过的策略方法回忆写在草稿纸上，在纸上的东西比单纯在脑中思考要清晰，因为大脑中没有很多的“内存”与 “堆栈”。如果所有可能的方法途径都试过了仍然没有结果，就不要再这道题上花费更多的时间，因为即使再用一个小时也不一定有好方法。可以此时参考答案，也许问题出在某个巧妙的构造或变形上。这样便于抓住思维的“卡壳点”，更深层次理解答案，积累巧妙的问题处理手段。

Q：如果答案看不懂，怎么办？
A：对于足够难的题目，应该多读几遍，尤其对其中重要的步骤加以关注。先理清解题的脉络，了解答案的基本思路和证明策略，再深入每个环节中，观察各环节的中间结论是如何得出的。这样一般能理解出题人的意图。一道难题的难点，可能在整体思路的构造上，也可能在某个关键环节的具体实现上。如果读三遍以上还不懂，可能是题目太难，或答案有误。这时应充分发挥群体的力量，合作解题，若再无结果则可跳过。

Q：若竞赛的几个类型中，某个类型较为突出，又有某个类型学的较差，应进一步拔高优势，还是首先弥补弱项？

A：当前竞赛趋势越来越简单，虽然解答题个数不多，不可能每个类型都考到，但谁也不敢打包票今年的题目会出或不会出某个方面、类型的题。所以我们要尽量均衡发展，对每个类型都有一定的理解，不可偏废。应该首先弥补弱项，因为在省赛中，题目不会很难，拔高优势不会有太好的效果，而多做出一种类型的题目可能提高不少分数。

Q：答题步骤与标准答案不同，不能得分，怎么办？如何尽量使答题过程更加规范？
A：每年竞赛的命题人不同，命题的思路、角度也不同，解题方法不同，我们难以做到与标准答案完全相同。只能做到尽量规范。所谓规范，就是逻辑严谨，每一步的结论都是由已知条件、定理定律、公式方程、已经得出的结论推出的，没有想当然的步骤；把自己的思路表达清楚，尤其注意加上必要的文字说明；分步计算求值，说明每步的意义和依据，不要一个式子拖到底；在文字排版方面，注意美观整齐。这样，答题就会更加规范，避免丢失步骤分。如果确实因为步骤问题丢分，我们也没有办法，因为竞赛本身就是一种碰运气的事，有较大风险。

Q：我学习了两科竞赛，应该如何处理主次关系？
A：尽量抓住重点，确定一科作为主攻方向花较多的精力，另一科只要跟着学即可。争取一科突出，进入省队，另一科一般，刚好拿到一等奖。当然，省队人数极少，而希望进入的人很多，有运气的成分，而一等奖则相对保险，故不宜专攻一科，只瞄准省队，

应该给自己留下未进省队的后路。

Q：有时做题正在兴奋之中，躺在床上无法入眠，怎么办？
A：首先这说明这位同学对竞赛的热爱程度很深，有很大的潜力。遇到失眠的情况，不仅是兴奋的问题，还有可能是考前过于紧张的原因。可以暂时想一些与学习无关的较为轻松的话题，放松大脑；如果无效，可以尝试做俯卧撑或仰卧起坐，身体较累后就容易睡着了。最好不要用数数字的方法，这样只会使大脑更加紧张。千万不要在考前想“万一得不上奖怎么办”之类的问题，一定要自我积极暗示，放松心态，少考虑后果，多注重过程。

Q：关于竞赛中要喝酸奶，有什么作用，是否必要？
A：主要是个人习惯问题。如果平时连续做 3 个小时题感觉体力不支，可以喝酸奶；如果能够保持精力充沛，就没有必要。喝酸奶某种程度上也是缓解心理压力，平衡心态的心理手段。

Q：你每天作息习惯如何？
A：作息习惯是自己的问题，我只说自己的方法，不一定适用。早晨 6：40 起床，吃饭 15 分钟，到学校 7：05，学习 30 分钟竞赛，中午在食堂吃完饭回到家 12：25，开始做竞赛题，直到 2：00 去学校上课。下午自习课到机房上机，第一节晚自习保证做完作业。有时作业较少，课上边听课就完成了。后面直到 23：30 睡觉，一直学竞赛。我对边角时间很注意利用，时间利用率较高，绝不浪费时间。因为我学习多科竞赛，还要搞好文化课，这样必须在一半时间中完成别人相同的工作量，要求提高时间效率。

Q：竞赛学习中老师起什么作用？
A：竞赛学习不同于高考学习，教练员作用并不明显，主要在自己。在高一时，老师的作用主要是教授新的竞赛知识。当高二新知识教授完毕后，主要是组织考试、评阅试卷、规范表达、思路点拨等工作，做出专题总结，更重要的是指明竞赛学习的方向，制定学习计划和内容，起引领者的作用。很多难题并不能期待老师解决，而要依靠团队的力量讨论、思考。

Q：上其他科文化课时做竞赛题，是否有效？
A：最好不要边听课边做题，这样文化课也耽误，竞赛题也做不好。首先，老师的讲课就是对做题的很大干扰，其次我们还想注意老师讲课的内容，生怕耽误一些重要内容没有听到。可以在听课时写作业，就像我做的。高考的教学内容简单，一般是有松紧的，当讲课不重要内容或做题时间，可以拿出当科作业来写，开始讲课时再回到老师上，避免在不同科目间来回切换，还解决了作业问题，充分利用时间。

Q：为了学习竞赛，是否应该停一些科目的课程？
A：政治课是一定要停的，你学的竞赛科目也没有必要上了，不重要的课程，如生物，也可以酌情考虑停课，因为至少目前各校自主招生尚未包括生物。当高三开学后可以考虑全面停课，因为需要马上冲刺竞赛，这样暑假、九月份便有三个月准备时间全身心投入竞赛。另外警告一点，听课后在自习室学习，要紧张起来，做到在自习室学习效率比正常听课高，学一节课下来比正常听课累，停课才有效果、有意义，决不能停课后自我放松。如果不能做到这一点，不如不停课，学习文化课课程，在课下时间抓紧学习。

Q：万一竞赛未能获奖，退到高考是否有希望？
A：如果平时保持高考科目成绩正常，就不是大问题。大多数人高三复习一年，尤其是第二学期，都是巩固的过程，几乎没有什么提高。这时如果基础还可以，追上其他人，是完全有可能的。况且对于高考中的难题、压轴题，学过竞赛的学生有明显优势。不要对高考过分担心，不要有太多的压力，现在放开手脚尽可能去学好竞赛就行了。另外即使不参加高考，文化课也不能放弃，因为还要参加自主招生考试。如果语文考了十几分，那么竞赛再好，其它科再好，也于事无补了。

Q：学习竞赛要付出多大的努力，例如做多少本书够用？
A：这个问题我们无法回答，只能说越多越好，越努力越可能取得更大的收获。做题不在数量多少，关键是要有收获，要在做题中悟出竞赛的思想方法和解题策略。

·书讯· 《骗分导论·数学竞赛》(81页)已由博杰学习网出版,授权数之理论坛发布.《骗分导论·信息学竞赛》(250页左右)即将出版.下载地址是 http://boj.5d6d.com/,位于“论坛专著”区.

《骗分导论》系列书籍,针对高中数学竞赛、信息学竞赛,详细地介绍了竞赛中多得分的策略,同时运用策略对近来大型竞赛试题解析.是国内第一部关于竞赛获胜策略的专著,值得每位竞赛选手阅读学习.

《数学竞赛》中,教你应用“骗分”打开思路,将自己的思路表达清楚,猜想答案,得到分数.《信息学竞赛》中,教你应用“非完美算法”,保证没有题无故失分.在高端信息学竞赛中,如果每题有分,则胜过一题满分.《骗分导论》系列中,很多试题的解答都是原创,或首次公开.

·下期预告·

本刊下期将继续关注数学竞赛,信息学竞赛,及科学方面的趣题.

概率问题是一个贯穿古今的难题,很多有趣的数学问题,也以概率为背景.下期将推出大型专题,介绍概率问题的发展历史与当今理论,尤其针对概率的本质,涉及无穷状态的概率问题.组合游戏问题,掷硬币连正面次数问题,随机游走问题等趣题,无不体现着深邃的数学思想和巧妙的构造策略.

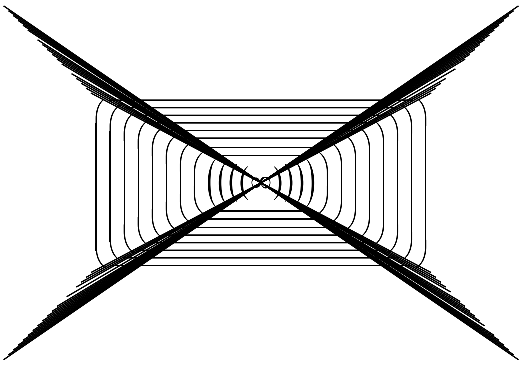
本刊坚持高起点,高标准的原则,要求文章的水平应与《中等数学》等正式刊物相当.我们将推出数学竞赛与信息学竞赛的一系列专题,讲述解题新策略. 介绍一些经典证明.对一些问题进行推广.

命题解题板块,我们将继续讨论广泛关注却悬而未决的难题,争取对这些趣题的认识更进一步.欢迎读者加入问题讨论.

科技之光板块,我们将继续解答同学们心中的疑惑,介绍生活中的科学原理,让读者充分体验大自然的奥秘.

下期将更加注重模拟试题板块,命制更高质量的试题.

欢迎读者积极加入数之理论坛.对问题有独到见解的,欢迎向本刊投稿.



·创刊人·

李博杰(1992-),河北石家庄人,高中在校,就读于石家庄二中2007级省级理科实验班,参加数学、信息学竞赛.

光辉足迹

2004年“华罗庚金杯”数学竞赛小学组金牌(全国第八名)

2004年石家庄市“十佳金童”称号

2004年“我爱数学”夏令营一等奖

2006年“希望杯”数学竞赛初二组银牌(全市第二名)

2006年NOIP(信息学竞赛)普及组省一等奖(满分)

2007年中考以611分考入石家庄二中

2008年NOIP提高组省一等奖(全省第二名)

正在向NOI,向数学竞赛全力冲刺……

·主办网站·

博杰学习网是专注于数学与信息学竞赛的网站,地址为 http://boj.pp.ru/

博杰学习网的宗旨是:融合经典数学推理与现代信息技术,努力为祖国的科技发展撑起一片蓝天。

博杰学习网的内容主要包括:

(1)各学科竞赛(主要是数学、信息学)的学习资料、竞赛试题解答、信息动态、个人研究成果;

(2)各高考科目(主要是数学、语文、物理、英语)的学习资料、考试真题、应试策略、命题分析;

(3)优秀文学作品,关于社会的深度思考;

(4)趣味科学问题,科普知识,科技进展,科学文化;

(5)个人随笔文章与决策公告;

(6)班级、学校事务的发布、评论。